



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 194

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 188

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 259

**A4. α)** ΛΑΘΟΣ

**β)** ΣΩΣΤΟ

**γ)** ΛΑΘΟΣ

**δ)** ΣΩΣΤΟ

**ε)** ΣΩΣΤΟ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow z\bar{z}+16=4z\bar{z}+4$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho=2$ .

**B2. α)** Αρκεί να δείξουμε ότι  $\bar{w} = w$ .

$$\text{Έχουμε } \bar{w} = \overline{\left( \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right)} = 2 \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + 2 \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = 2 \frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} + 2 \frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} =$$

$$2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = w.$$

Άρα ο  $w$  είναι πραγματικός.

$$\beta) \quad |w| = \left| 2 \frac{z_1}{z_2} + 2 \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$$

$$|w| \leq 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \frac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow |w| \leq 2 + 2 \Leftrightarrow |w| \leq 4$$

Και επειδή  $w \in \mathbb{R}$

$$-4 \leq w \leq 4.$$

**B3.** Αν  $w = -4$

$$2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$z_2^2 + z_1^2 = -2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$$

$$\begin{aligned} A\Gamma &= |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = \\ &= 2\sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1 + 2i)| = |z_1| \cdot |1 + 2i| = 2\sqrt{5}$$

Άρα  $A\Gamma = B\Gamma$ .

Οπότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** 
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Αφού  $(x-1)^2 \geq 0$ ,  $(x^2+1)^2 > 0$ ,  $e^x > 0 \forall x \in A_f$  και  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'$		+	+
$f$		$\nearrow$	$\nearrow$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Στο 
$$\left. \begin{array}{l} A_1 = (-\infty, 1] \\ f \square A_1, \text{ συνεχής} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(A_1) = \left(0, \frac{e}{2}\right]$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = [1, +\infty) \\ f \square A_2, \text{ συνεχής} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(A_2) = \left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty)$ .

**Γ2.** 
$$f(e^{3-x}(x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x}(x^2+1)) = f(2) \stackrel{f \square}{\Leftrightarrow} e^{3-x}(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Αφού το  $\frac{e^3}{2} \in f(A)$ , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και αφού  $f$  γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

**Γ3.** Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\int_{2x}^a f(t) dt + \int_a^{4x} f(t) dt < 2x \cdot f(4x) \stackrel{:2x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{2x} < \frac{2x}{2x} f(4x)$$

$$\frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{2x} < f(4x) = K'(4x) \quad (1)$$

Έστω η  $K(x) = \int_a^x f(t) dt$ , με  $f$  συνεχή. Άρα η  $K$  είναι παραγωγίσιμη.

Εφόσον  $x > 0$ ,  $2x < 4x$  και από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο

$$[2x, 4x] \exists \xi \in (2x, 4x) \text{ ώστε } K'(\xi) = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{2x} \Leftrightarrow K'(\xi) = f(\xi).$$

Με  $K'(x) = f(x) > 0 \Leftrightarrow K''(x) = f'(x) > 0$  (από ερώτημα  $\Gamma_1$ ). Άρα  $K'$  είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως  $\xi < 4x \stackrel{K'}{\Leftrightarrow} K'(\xi) < K'(4x)$ , που είναι η ζητούμενη.

**Γ4.** Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  γιατί η  $f$  είναι συνεχή στο  $(0, +\infty)$

$$2x, 4x > 0, a > 0 \text{ με } g(x) = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt}{x} = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{x}$$

Άρα

$$g'(x) = \frac{[f(4x) \cdot 4 - f(2x) \cdot 2]x - \left( \int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt \right)}{x^2} = \frac{f(4x) \cdot 4x - f(2x) \cdot 2x - \int_a^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

$$= \frac{\left[ 2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt \right] + [2xf(4x) - 2xf(2x)]}{x^2} = \frac{\left[ 2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt \right] + 2x[f(4x) - f(2x)]}{x^2} > 0$$

Λόγω του ερωτήματος  $\Gamma_3$

$$2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt > 0 \text{ \& } 2x[f(4x) - f(2x)] > 0 \text{ γιατί } x > 0 \text{ και καθώς η}$$

$f$  είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$ .

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Θα δείξουμε ότι η  $g$  είναι συνεχή στο  $x_0 = 0$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_a^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} [4f(4x) - 2f(2x)] \stackrel{(*)}{=}$$

$$= 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2 \cdot 1 = 2 = g(0)$$

Άρα η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Οπότε η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

(\*) Η συνάρτηση  $[4f(4x) - 2f(2x)]$  είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

### ΘΕΜΑ Δ

#### Δ1.

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e^{f(x)} + e^{-f(x)} \cdot f'(x) &= 2 \\ f'(x) \cdot e^{f(x)} - 2 &= -f'(x) \cdot e^{-f(x)} \\ (e^{f(x)} - 2x)' &= (e^{-f(x)})' \\ e^{f(x)} - 2x &= e^{-f(x)} + c \quad (1) \end{aligned}$$

Για  $x = 0$

$$e^0 - 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 &= 1 + x^2 \\ (e^{f(x)} - x)^2 &= 1 + x^2 \\ |e^{f(x)} - x| &= \sqrt{1 + x^2} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θέτω  $g(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$ . Αφού η  $g$  είναι συνεχής και  $g(x) \neq 0$ , τότε διατηρεί πρόσημο.

Όμως  $g(0) = 1 > 0$ . Άρα  $g(x) > 0$ .

$$\begin{aligned} e^{f(x)} - x &= \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1 + x^2} \\ \Leftrightarrow f(x) &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \end{aligned}$$

"1-1"

**Δ2.**



$$\alpha) f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''$		+	-
$f$			

Σ.Κ.

Η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 0]$  και κοίλη στο  $[0, +\infty)$ .

Η  $f$  παρουσιάζει καμπή στο  $x_0 = 0$  και η καμπή είναι το  $f(0) = 0$ .

**β)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο  $(0, f(0))$  είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1$$

Οπότε  $y = x$ .

Άρα η  $f$  είναι κοίλη για κάθε  $x \geq 0$ .

Επομένως ισχύει  $f(x) \leq x$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

Άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 \left[ x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \left(\frac{x^2}{2}\right)'_0^1 = \frac{1}{2} \qquad I_2 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x)' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= \left[ x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1 \quad \tau.\mu. \end{aligned}$$

**Δ3.**

$$K = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \cdot x \ln|f(x)|.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{1} \stackrel{f \text{ συνεχής στο } 0}{=} f^2(0) = 0$$

$$\Lambda = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln|f(x)|)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \frac{x^2}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2)'}{(f(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{f'(x)} \stackrel{f' \text{ συνεχής στο } 0}{=} \frac{0}{1} = 0$$

Άρα  $\Lambda=0$  οπότε  $K=0$

**Δ4.** Θεωρώ  $K(x) = (x-2) \left( 1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left( 8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$

Επειδή  $f(t)$  συνεχής τότε οι  $f^2(t)$  &  $f(t^2)$  συνεχείς ως σύνθεση συνεχών, άρα η  $K$  παραγωγίσιμη και συνεχής στο  $[2,3]$ .

$$K(2) = 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0$$

Αιτιολόγηση:

Η  $f$  είναι κοίλη, τότε η εφαπτομένη της  $y = x$  είναι πάνω από την  $C_f$ .

Άρα  $f(t) \leq t$ . Επειδή  $f(t) > 0$ , έχουμε

$$f^2(t) \leq t^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt \leq \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(t) dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0$$

$$K(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0$$

Αιτιολόγηση:

$$f(t) \leq t \Leftrightarrow f(t^2) \leq t$$

$$f(t^2) \leq t \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt \leq \frac{1}{3}$$

Άρα  $K(2) \cdot K(3) < 0$ . Επομένως από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (2, 3) : K(x_0) = 0$