

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 60

A2. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.
$$A(x) = \frac{2}{\sigma\phi x + \epsilon\phi x} = \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{2\eta\mu\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu 2x}{1} = \eta\mu 2x.$$

B2.
$$B(x) = \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x}{2} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu\sigma\upsilon\nu x}{2} = \frac{1}{2}.$$

B3.
$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \eta \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \eta \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array} \right\} k \in \mathbb{Z}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

- B4.** Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τύπο: $f(x) = A(x) - B(x) = \eta\mu 2x - \frac{1}{2}$
- Ισχύει $-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 - \frac{1}{2} \leq \eta\mu 2x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- Άρα η ελάχιστη τιμή της είναι $-\frac{3}{2}$ και η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{1}{2}$.
- Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Αν x παράγοντας του $P(x)$ τότε $P(0) = 0$ οπότε $\mu = 0$.
 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x+1)$ είναι το 3 τότε:
 $P(-1) = 3 \Leftrightarrow -2 - 3 + 7 + \lambda + 6 + 7 + 0 - 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

- Γ2.** Για $\lambda = 2$ και $\mu = 0$ έχουμε:
 $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x$.

Η διαίρεση γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x \\
 \underline{-2x^5 \quad + 4x^3} \\
 -3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 7x \\
 \underline{+ 3x^4 \quad - 6x^2} \\
 -3x^3 + 2x^2 + 7x \\
 \underline{+ 3x^3 \quad - 6x} \\
 2x^2 + x \\
 \underline{2x^2 + 4} \\
 x + 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 2 \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2
 \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:
 $P(x) = (x^2 - 2)(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2) + x + 4$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

- Γ3.** Πρέπει $P(x) > x+4 \Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4 > x+4 \Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2) > 0$ (I)
Πιθανές ακέραιες ρίζες του $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ είναι $\pm 1, \pm 2$.

Με σχήμα Horner έχω:

	2	-3	-3	2	-1
↓		-2	5	-2	
	2	-5	2	0	

Άρα $Q(x) = (x+1)(2x^2-5x+2)$.

Οπότε (I) $\Leftrightarrow (x^2-2)(2x^2-5x+2)(x+1) > 0$

Άρα $\Delta=25-16=9, x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}, x^2-2=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Το πρόσημο των παραγόντων του γινομένου αλλά και του γινομένου τους φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	x	$-\sqrt{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2			
x^2-2	+	0	-	-	0	+	+		
$2x^2-5x+2$	+	+	+	0	-	-	0	+	
$x+1$	-	-	0	+	+	+	+		
Γινόμενο	-	0	+	0	-	+	0	-	+

Άρα $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
 Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Γ4. Πρέπει $P(x)=Q(x)$

$$\Leftrightarrow 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x = 2x^5 + (2\alpha + \beta)x^4 - 7x^3 + (-3\alpha + 2\beta)x^2 + (\kappa + 6)x + \kappa - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ -3\alpha + 2\beta = 8 \\ \kappa + 6 = 7 \\ \kappa - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ορίζεται αν $e^{x+1} - e \neq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \neq e \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$
 και

$$\frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} > 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} > 0 \Leftrightarrow e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$$

αφού για τον αριθμητή έχουμε:

$$\Delta = (e+1)^2 - 4 \cdot e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 0.$$

$$\text{και } e^x = \frac{(e+1) \pm (e-1)}{2} \text{ οπότε γράφεται } (e^x - e)(e^x - 1).$$

Άρα πρέπει $x \neq 0$ και $x > 1$ δηλαδή $A_f = (1, +\infty)$. Τότε απλοποιείται ως εξής:

$$f(x) = \ln \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} = \ln \frac{e^x - e}{e}$$

Δ2. Η $g(x)$ γράφεται: $g(x) = e^{2x-1} - 4e^{x-1} + 3 = \frac{e^{2x}}{e} - \frac{4e^x}{e} + 3 = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e}$.

$$\text{Άρα } g(x) = e^{\ln \frac{5+3e}{e}} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} = \frac{5+3e}{e} \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 4e^x + 3e = 5 + 3e \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 = 36 \text{ και } e^x = \frac{4 \pm 6}{2} \text{ δεκτη.}$$

Άρα $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$ δεκτη.

Δ3. Αρκεί $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \leq \ln 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e \leq e \Leftrightarrow e^x \leq 2e \Leftrightarrow e^x \leq e^{\ln 2e} \Leftrightarrow x \leq \ln 2e$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
 Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Όμως $x > 1$ δηλαδή $1 < x \leq \ln 2e$.

$$\Delta 4. \quad e^{f(x)} \geq g(x) + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \geq \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow$$

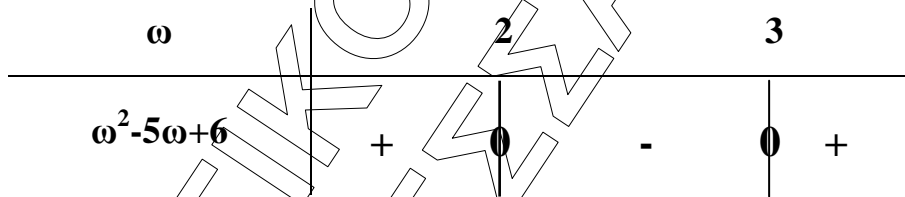
$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} \geq \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow e^x - e \geq e^{2x} - 4e^x + 3e + 6 - 4e \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 - 5\omega + 6 \leq 0 \quad \text{όπου} \quad \omega = e^x > 0$$

$$\text{Είναι} \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

$$\text{Οπότε} \quad \omega = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Το πρόσημο φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:



$$\text{Άρα} \quad 2 \leq \omega \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq e^x \leq 3 \Leftrightarrow \ln 2 \leq x \leq \ln 3.$$

Όμως $x > 1$ και $\ln 2 < \ln e = 1$ οπότε επαληθεύεται μόνο για $1 < x \leq \ln 3$.