

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε απόδειξη θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 263.
- A2.** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 280.
- A3.** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 303.
- A4.** $\alpha \rightarrow \Lambda$. Το σωστό είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$. Βλέπε σελίδα 171 σχολικού βιβλίου.
- $\beta \rightarrow \Sigma$. Βλέπε σελίδα 217 σχολικού βιβλίου.
- $\gamma \rightarrow \Sigma$. Βλέπε σελίδα 330 σχολικού βιβλίου.
- $\delta \rightarrow \Sigma$. Βλέπε σελίδα 192 σχολικού βιβλίου.
- $\epsilon \rightarrow \Lambda$. Το σωστό είναι: τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ . Βλέπε σελίδα 261 σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, καθώς η f για κάθε $x \neq 1$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

1^{ος} τρόπος

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 = f(1).$$

Θέτοντας $u = x - 1$ ισχύει αν $x \rightarrow 1$ τότε $u \rightarrow 0$ και έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \text{ το οποίο είναι η παράγωγος της συνάρτησης } h(x) = e^x, \text{ για } x = 0.$$

$$\text{Άρα } h'(x) = e^x, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = h'(0) = 1.$$

2^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} \cdot (x-1)' = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} = e^0 = 1 = f(1).$$

B2. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} - 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1), \text{ δηλαδή } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ οπότε } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

B3. Η συνάρτηση $g(x) = (x - 2)e^{x-1} + 1$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πράξεις συνεχών στο \mathbb{R} , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R} , με $g'(x) = e^{x-1} + (x - 2) \cdot e^{x-1} = e^{x-1}(1 + x - 2) = e^{x-1} \cdot (x - 1)$.

Έχουμε: $g'(x) \geq 0$, οπότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{x-1}(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Ομοίως αν $g'(x) < 0$ προκύπτει $x < 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	\leftarrow	○+	\rightarrow
$g(x)$	\swarrow	min	\searrow

Επειδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $g(1) = (1 - 2) \cdot e^{1-1} + 1 = -1 + 1 = 0$, ισχύει $g(x) \geq g(1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή ισχύει $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x-1}(x-1) - (e^{x-1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{xe^{x-1} - e^{x-1} - e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{xe^{x-1} - 2e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 1. \end{aligned}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

B4. Ισχύει ότι:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2015, 2016]$ ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [2015, 2016]$, καθώς η συνάρτηση g μηδενίζεται μόνο στο $x = 1$.

Οπότε από γνωστό Θεώρημα έχουμε: $\int_{2015}^{2016} g(x) dx > 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \geq 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = f(0) - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του \mathbb{R} και η g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$g'(x) = \left(f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \right)' = f'(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Γ2. 1^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) \cdot f'(x))' + f(x) \cdot f'(x) &= 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \\ e^x (f(x) \cdot f'(x))' + e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ e^x (f(x) \cdot f'(x))' + (e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' &= 0 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \\ e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot f''(x) + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot (f'(x))' + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' &= 0 \end{aligned}$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = c_1.$$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) \cdot f'(0) = c_1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = -2e^{-x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2e^{-x})'$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + c_2.$$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$f^2(0) = 2e^0 + c_2 \Leftrightarrow 3 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + 1 \neq 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .

Επειδή $f(0) = \sqrt{3} > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. 1^{ος} τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2e^{-x_1} + 1} = \sqrt{2e^{-x_2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$2e^{-x_1} + 1 = 2e^{-x_2} + 1 \Leftrightarrow 2e^{-x_1} = 2e^{-x_2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x_1} = e^{-x_2} \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{2e^{-x} + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{2e^{-x} + 1}} (2e^{-x} + 1)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2e^{-x} + 1}} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε και 1-1 συνάρτηση, συνεπώς αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2e^{-x} + 1} \quad (1)$$

Θα πρέπει $y \geq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$y^2 = 2e^{-x} + 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y^2 - 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Θα πρέπει } \frac{y^2 - 1}{2} > 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 > 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y > 1.$$

Με αυτόν τον επιπλέον περιορισμό έχουμε:

$$\ln e^{-x} = \ln\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{y^2 - 1}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2}{y^2 - 1}\right), y > 1$$

Άρα είναι:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2 - 1}\right), x > 1.$$

Υποσημείωση: Το σύνολο τιμών της f το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} , μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια και την μονοτονία της f .

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx$.

Έχουμε:

$$I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{2e^{-x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2}{e^x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2 + e^x}{e^x}} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 2} dx$$

Θέτουμε $e^x = u$, οπότε $e^x dx = du$.

Επίσης $e^x + 1 = u + 1 > 0$ και $e^x + 2 = u + 2 > 0$.

Για $x = \ln(e-2)$ είναι $u = e^{\ln(e-2)} = e-2$.

Για $x = 0$ είναι $u = e^0 = 1$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_{e-2}^1 \frac{u+1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \frac{u+2-1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \left(1 - \frac{1}{u+2}\right) du = \\ &= [u]_{e-2}^1 - [\ln(u+2)]_{e-2}^1 = 1 - (e-2) - (\ln 3 - \ln(e-2+2)) = \\ &= 1 - e + 2 - \ln 3 + \ln e = 4 - e - \ln 3. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$, ή ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Η συνάρτηση $g(x) = \ln x + x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με:

$$g'(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + x > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

1^{ος} τρόπος

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$ και επειδή είναι συνεχής στο $(0,1)$, έχουμε:

$$g((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \right) = (-\infty, 1),$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + x) = 1$

Επειδή $0 \in g((0,1))$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ και αφού η είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό η ρίζα θα είναι μοναδική.

2^{ος} τρόπος

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x) = -\infty$.

Οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ με $0 < \alpha < 1$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha) < 0$.

Επίσης $g(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$.

Επομένως $g(\alpha) \cdot g(1) < 0$.

Επειδή η g είναι και συνεχής στο $[\alpha, 1] \subseteq (0,1)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η συνάρτηση g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 1) \subseteq (0,1)$.

Επιπλέον η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

3^{ος} τρόπος

Ενδεικτικά, εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$.

Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση $e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x}$.

Επειδή $x_0 > 0$ θα πρέπει και $x > 0$, οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow \ln e^{x-x_0} = \ln \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow x - x_0 = \ln x_0 - \ln x \Leftrightarrow$$

$$x + \ln x = x_0 + \ln x_0 \Leftrightarrow g(x) = g(x_0). \quad (1)$$

Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, οπότε έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = g(x_0) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} x = x_0.$$

Δ2. i) Για $0 < a < 1$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{\alpha}^1 |g(x) - x| dx.$$

Έχουμε:

$$x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x + x \leq x \Leftrightarrow g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0.$$

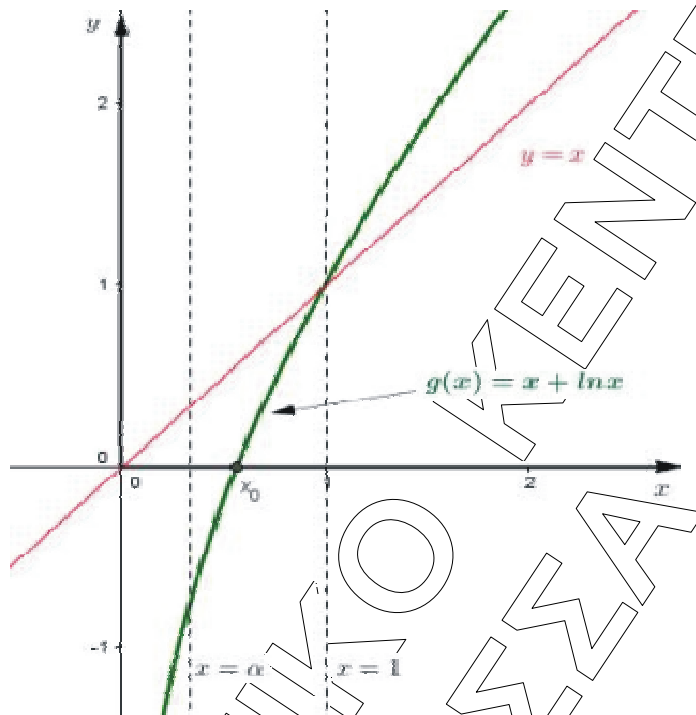
Συνεπώς στο $[\alpha, 1]$ είναι $|g(x) - x| = x - g(x)$.

Επομένως είναι:

$$E = \int_{\alpha}^1 (x - g(x)) dx = \int_{\alpha}^1 (x - \ln x - x) dx = \int_{\alpha}^1 (-\ln x) dx = \int_1^a \ln x dx =$$

$$= \int_1^a (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^a - \int_1^a x (\ln x)' dx = a \ln a - \int_1^a x \frac{1}{x} dx =$$

$$= a \ln a - \int_1^a 1 dx = a \ln a - [x]_1^a = a \ln a - a + 1 \text{ τ.μ.}$$



ii) Από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha'(t) = 1 \text{ cm/sec}$.

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του αριθμού α αυξάνει, δηλαδή κινείται απομακρυνόμενος από το 0 και προσεγγίζοντας το 1, αφού $0 < \alpha < 1$.

Επειδή η θέση του αριθμού α είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t) = \alpha(t) \cdot \ln(\alpha(t)) - \alpha(t) + 1.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$E'(t) = \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha(t) \cdot (\ln(\alpha(t)))' - \alpha'(t) =$$

$$= \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha'(t) =$$

$$= \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha'(t) - \alpha'(t) = \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)).$$

Την χρονική στιγμή t_0 στην οποία είναι $\alpha(t_0) = x_0$ έχουμε:

$$E'(t_0) = \alpha'(t_0) \cdot \ln(\alpha(t_0)) = 1 \cdot \ln x_0 = \ln x_0.$$

Όμως από Δ1. ερώτημα ισχύει ότι:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0.$$

Συνεπώς $E'(t_0) = -x_0 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

Δ3. Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ η g είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι:

$$0 < g^{-1}(x) < -\frac{1}{x} \quad (1) \quad \text{για κάθε } x < 0$$

Πράγματι το $0 < g^{-1}(x)$ προκύπτει γιατί το σύνολο τιμών της g^{-1} είναι το $(0, +\infty)$. Για το $g^{-1}(x) < -\frac{1}{x}$ έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$g^{-1}(x) < -\frac{1}{x} \Leftrightarrow g(g^{-1}(x)) < g\left(-\frac{1}{x}\right) \quad [g \text{ γνησίως αύξουσα}]$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{x} + \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > -1 + x \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \quad [x < 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 > -1 + x(-\ln(-x)) \quad \left[\ln\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\ln(\theta) \right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + x \ln(-x) > 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει, αφού από την γνωστή σχέση $\ln x \leq x - 1, x > 0$, έχουμε για κάθε $x < 0$:

$$\ln(-x) \leq -x - 1 \Rightarrow x \ln(-x) \geq -x^2 - x \Rightarrow x^2 + x \ln(-x) + 1 \geq -x + 1 > 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής η (1) δίνει $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^{-1}(x) = 0$

Η σχέση $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x, x > 0$ με την αντικατάσταση του x με το $g^{-1}(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ δίνει:

$$f(x) = f(g^{-1}(x)) + e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x)-1) + \ln(g^{-1}(x)), \quad (2) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $g^{-1}(x) = u$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^{-1}(x) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g^{-1}(x)) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x)-1) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u(u-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(g^{-1}(x))) = \lim_{u \rightarrow 0} (\ln u) = -\infty$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(g^{-1}(x)) + e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x) - 1) + \ln(g^{-1}(x))] = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (2)$$

Δ4. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x) + e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = xe^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow \\ f(g(x)) - f(x) &= e^{\ln x} e^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x + x} - e^x + \ln x \Leftrightarrow \\ f(g(x)) - f(x) &= e^{g(x)} - e^x + \ln x. \end{aligned}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με τον όρο $g(x) - x = \ln x > 0$, για κάθε $x > 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + \frac{\ln x}{g(x) - x} \Leftrightarrow \\ \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + \frac{\ln x}{\ln x} \Leftrightarrow \\ \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + 1. \quad (1) \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , επομένως είναι συνεχής στο $[x, g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, g(x))$, για κάθε $x > 1$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[x, g(x)]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_1 \in (x, g(x))$ με $1 < x < \xi_1 < g(x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x}. \quad (2)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x$ οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , επομένως είναι συνεχής στο $[x, g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, g(x))$, για κάθε $x > 1$, με $h'(x) = e^x$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την h στο $[x, g(x)]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_2 \in (x, g(x))$ με $1 < x < \xi_2 < g(x)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi_2) = e^{\xi_2} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x}. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) η (1) δίνει: $f'(\xi_1) = e^{\xi_1} + 1$, με $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$.

Ενδεικτικά ένας 2^{ος} τρόπος είναι:

Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = xe^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x} e^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x + x} - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) - f(x) = e^{g(x)} - e^x + \ln x.$$

$$\text{Οπότε: } f(g(x)) - e^{g(x)} - g(x) = f(x) - e^x - x. (1)$$

Έστω η συνάρτηση $y(x) = f(x) - e^x - x, x > 0$.

Τότε η (1) γίνεται: $y(g(x)) = y(x)$, για κάθε $x > 0$. (2)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση y στο $[x, g(x)]$

για κάθε $x > 1$.

Η y είναι συνεχής στο $[x, g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, g(x))$ για κάθε $x > 1$, ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα διαστήματα αυτά.

Λόγω της (2) ισχύει $y(g(x)) = y(x)$.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (x, g(x))$, άρα και $\xi > 1$, τέτοιος ώστε $y'(\xi) = 0$.

Όμως $y'(x) = f'(x) - e^x - 1$, οπότε $f'(\xi) - e^\xi - 1 = 0$.

Οπότε έχουμε $f'(\xi) = e^\xi + 1, \xi > 1$.

Για $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ έπεται το ζητούμενο.