ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\theta > 0$ και $k \in R$, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k\log_\alpha \theta.$$

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 ισχύει

$$\log\frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}.$$

β. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι

$$S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu.$$

γ. Αν υ(x) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου Δ(x) δια του δ(x), όπου δ(x) και υ(x) είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του υ(x) είναι μικρότερος από το βαθμό του δ(x).

δ. Εάν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Μονάδες 4

Γ. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με ...

α. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\cdots}$ όπου $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος

β. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \ldots$ όπου $\theta > 0$ και $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$

γ. $\log_\alpha \alpha^x = \ldots$ όπου $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $x \in R$

Μονάδες 6

Δ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων ημx και συνx.

x	0 — $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ — π	π — $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ — 2π
ημx				
συνx				

Μονάδες 6

<u>Απάντηση:</u>

Α. Έστω ότι είναι

$\log_{\alpha}\theta = x$ (1)

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων θα έχουμε ισοδύναμα ότι

$\theta = \alpha^{x}$

οπότε $\theta^{\kappa} = (\alpha^{x})^{\kappa} \Leftrightarrow \theta^{\kappa} = \alpha^{x\kappa} \Leftrightarrow$ (με $\kappa \in R$)

$\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa x$ (2) (ορισμός των λογαρίθμων)

Τέλος η (2) λόγω της (1) γράφεται

$\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha}\theta$

Β.

α.	**β.**	**γ.**	**δ.**
Λ	**Σ**	**Σ**	**Λ**

Γ.

α. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

β. $\alpha^{\log_{\alpha}\theta} = \theta$

γ. $\log_{\alpha}\alpha^{x} = x$

Δ.

x	0		$\frac{\Pi}{2}$		Π		$\frac{3\Pi}{2}$		2Π
ημx		↗		↘		↘		↗	
συνx		↘		↘		↗		↗	

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x = 0$.

Μονάδες 13

β. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

Μονάδες 12

<u>Απάντηση:</u>

α. Έχουμε

$$\eta\mu 2x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \left(2\eta\mu x - \sqrt{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0$$

οπότε

$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ (1)

ή

$\sigma\upsilon\nu x = 0$ (2)

- Από την (1) έχουμε

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

οπότε

$$\left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

με $\kappa \in Z$

- Από την (2) έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}.$$ Άρα $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in Z$

β.

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1-\left(1-2\eta\mu^2\alpha\right)}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-1+2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\left(1+\sigma\upsilon\nu\alpha\right)} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$, όπου $\alpha \in R$.

α. Να κάνετε την διαίρεση του P(x) δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Μονάδες 4

γ. Για α = 3, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης P(x) = 0 καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 12

<u>Απάντηση:</u>

α.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 \quad + \quad x^2 & x^2 - 8x + 5\alpha \\ \cline{1-1}
\quad -8x^3 + 5\alpha x^2 \quad + 8x - 3\alpha - 6 & \\
\quad\ \ 8x^3 \qquad\qquad - 8x & \\ \cline{1-1}
\qquad 5\alpha x^2 \qquad - 3\alpha - 6 & \\
\qquad -5\alpha x^2 \qquad + 5\alpha & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 2\alpha - 6 &
\end{array}
$$

Από την παραπάνω διαίρεση προκύπτει η ταυτότητα:

$$P(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 - 8x + 5\alpha) + 2\alpha - 6$$

β. Η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια όταν

$$\upsilon = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

γ. Για $\alpha = 3$ η εξίσωση $P(x) = 0$
γράφεται:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)\,(x^2 - 8x + 5 \cdot 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 3)\,(x - 5) = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι -1, 1, 3, 5.
Η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι κάτω από τον $x'x$ όταν και μόνον όταν

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 3)\,(x - 5) < 0,$$

που από τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-1		1		3		5		$+\infty$
p(x)		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

προκύπτει ότι $\qquad x \in (-1, 1) \cup (3, 5).$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1}\,.$$

Μονάδες 13

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \ldots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}\,.$$

Μονάδες 12

<u>Απάντηση:</u>

Α.
Το πεδίο ορισμού της f είναι οι τιμές του x για τις οποίες:

$$-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1\geq 0$$

Θέτοντας $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=y>0$ (1) έχουμε:

$$-2y^2+3y-1\geq 0\Leftrightarrow 2y^2-3y+1\leq 0\Leftrightarrow 2(y-1)\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq y\leq 1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\leq\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\leq 1\Leftrightarrow 2\geq 5^x\geq 1\overset{\log\uparrow}{\Leftrightarrow}\log 2\geq\log 5^x\geq\log 1\Leftrightarrow 0\leq x\cdot\log 5\leq\log 2\overset{\log 5>0}{\Leftrightarrow}$$

$$0\leq x\leq\frac{\log 2}{\log 5}$$

Σημ. Εάν χρησιμοποιούσαμε το φυσικό λογάριθμο θα είχαμε $0\leq x\leq\frac{\ln 2}{\ln 5}$

Β.
Το πρώτο μέλος της δοσμένης εξίσωσης γράφεται:

g(x)+g(x+1)+g(x+2)+….+g(x+49) = $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}+\ldots.+5^{x+49}$ =
= $5^x+5^x\cdot 5+5^x\cdot 5^2+\ldots.5^x\cdot 5^{49}$ = $5^x\cdot(1+5+5^2+\ldots.+5^{49})$ (1)

όμως το άθροισμα $1+5+5^2+\ldots.+5^{49}$ είναι άθροισμα των 50 πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1=1$ και λόγο λ=5.
Οπότε:

$$1+5+5^2+\ldots+5^{49}=\frac{1\cdot(5^{50}-1)}{5-1}=\frac{5^{50}-1}{4} \qquad (2)$$

Έτσι η (1) λόγω της (2) γράφεται:

g(x)+g(x+1)+g(x+2)+…+g(x+49) $=5^x\cdot\frac{5^{50}-1}{4}$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$5^x\cdot\frac{5^{50}-1}{4}=\frac{125\cdot(5^{50}-1)}{4}\Leftrightarrow 5^x=125\Leftrightarrow 5^x=5^3.$$

Άρα x=3 (αφού η συνάρτηση 5^x είναι 1-1).