

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $\gamma'\gamma$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.$$

Μονάδες 10

- B.** Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

- β.** Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$.

Μονάδες 2

- γ.** Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $a, \beta, \gamma, k, \lambda$ με $a \neq 0$. Αν $a|\beta$ και $a|\gamma$, τότε $a|(k\beta + \lambda\gamma)$.

Μονάδες 2

- δ.** Αν A, B, Γ είναι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right|$$

Μονάδες 2

- ε.** Η εκκεντρότητα ϵ της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

Απάντηση:

- A.** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$, τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα $\gamma'\gamma$, οπότε $x_1 x_2 \neq 0$.

Έχουμε:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + \psi_1 \psi_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 \psi_2 = -x_1 x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\psi_1 \psi_2}{x_1 x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.$$

- B.** Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

- Γ.**

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

A. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Μονάδες 8

B. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

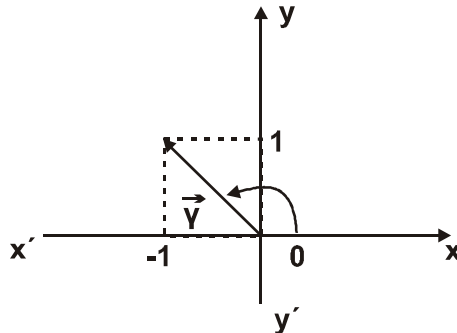
A. Είναι:

$$5\vec{\alpha} = 5(1, 2) = (5, 10), \quad 3\vec{\beta} = 3(2, 3) = (6, 9).$$

Άρα $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (5, 10) - (6, 9) = (-1, 1)$.

Οπότε $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

B.



Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον $x'x$, τότε $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{-1} = -1$ και επειδή

$\varphi \in [0, 2\pi)$, είναι $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ή $\frac{7\pi}{4}$.

Επειδή όμως το $\vec{\gamma}$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, προκύπτει $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Γ. Επειδή $\vec{\alpha} \perp \vec{v}$ προκύπτει $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 0$. Επομένως

$$(k^2 - k) \cdot 1 + k \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k - k = 0 \Leftrightarrow k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ή } k = -1.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $a = 12k - 5$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

A. Να αποδείξετε ότι ο a είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

B. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του a διά του 4.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (a^2+15)(a^2-1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.
Μονάδες 10

Απάντηση:

A. Έχουμε

$$a=12\kappa-5 = 12\kappa - 6 + 1 = 2(6\kappa-3) + 1 \\ = 2\rho + 1 \text{ (με } \rho = 6\kappa - 3 \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } \kappa \in \mathbb{Z}\text{)}. \text{ Άρα ο } a \text{ είναι περιττός αριθμός.}$$

$$\mathbf{B.} a = 12\kappa - 5 = 12\kappa + 8 - 8 - 5 = 12\kappa - 8 + 3 = 4(3\kappa - 2) + 3 = \\ 4\lambda + 3 \text{ (με } \lambda = 3\kappa - 2 \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } \lambda \in \mathbb{Z}\text{).}$$

Αφού $0 < 3 < 4$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του a διά του 4 είναι $u=3$.

$$\mathbf{Γ.} A = (a^2 + 15) \cdot (a^2 - 1)$$

Αφού a περιττός, είναι $a^2 = 8\lambda + 1$, με $\lambda \in \mathbb{Z}$ (από εφαρμογή 2ii σελίδα 143 σχολ. βιβλίου). Άρα

$$a^2 + 15 = 8\lambda + 16 = 8(\lambda + 2) \text{ και } a^2 - 1 = 8\lambda.$$

$$\text{Επομένως } A = (a^2 + 15) \cdot (a^2 - 1) = 8(\lambda + 2) \cdot 8\lambda = 64 \cdot \lambda(\lambda + 2) = \text{πολ}64.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x+4y+6=0$ και $\varepsilon_2: 3x+4y+16=0$.

A. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 7

B. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

Απάντηση:

A. Για $y=0$ στην ε_1 βρίσκουμε $x=-2$. Άρα το σημείο $K(-2,0)$ είναι σημείο της ε_1 .

Η απόσταση τώρα των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ίση με την απόσταση του σημείου K από την ε_2 .

Δηλαδή:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(K, \varepsilon_2) = \frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

B. Για $x=0$ στην ε_2 βρίσκουμε $y = -4$. Άρα το σημείο $\Lambda(0, -4)$ είναι σημείο της ε_2 . Βρίσκουμε τώρα τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθ. τμήματος $K\Lambda$:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_K + x_\Lambda}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{y_K + y_\Lambda}{2} = \frac{0 + (-4)}{2} = -2 \end{aligned} \right\} M(-1, -2)$$

Η μεσοπαράλληλη (ε) των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ως παράλληλή τους, έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης μ' αυτές.

Έτσι $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ και επειδή διέρχεται από το Μ θα έχει εξίσωση:

$$y - y_M = -\frac{3}{4}(x - x_M) \Leftrightarrow y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Leftrightarrow 4y + 8 = -3x - 3 \Leftrightarrow 3x + 4y + 11 = 0.$$

Γ. Έστω AB η χορδή που αποκόπτει ο ζητούμενος κύκλος από την ε_2 και Γ το μέσον της. Τότε το τμήμα ΚΓ είναι το απόστημα της χορδής και το μήκος του ΚΓ ισούται με την απόσταση των ε_1 και ε_2 . Επίσης είναι $AK=BK=R$, όπου R η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου.

Επειδή $AG = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$, από το ορθ. τρίγωνο ΑΚΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου

θεωρήματος είναι $KA^2 = K\Gamma^2 + AG^2$.

Δηλαδή: $R^2 = d^2(K, \varepsilon_2) + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$

$$R^2 = 2^2 + 12 \Leftrightarrow R^2 = 16 \Leftrightarrow R = 4.$$

Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x + 2)^2 + y^2 = 4^2$.

