ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 11

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
α. Εμβαδόν τραπεζίου	1. Ε=τρ
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$
	4. $E = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
	5. $E = \alpha \upsilon_\alpha$

Στη Στήλη ΙΙ περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"**, αν η πρόταση είναι σωστή, και **"Λάθος"**, αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma$.

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu{}^2 + \frac{\lambda_\nu{}^2}{2} = R^2$.

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 8

<u>Απάντηση:</u>

Α. Θεωρία. - Θεώρημα 1 σελ. 213 σχολικού βιβλίου.

Β.

α	β	γ
3	1	4

Γ.

α	β	γ	δ
Λ	Λ	Σ	Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_\nu=150^o$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν.

Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

<u>Απάντηση:</u>

α. Γνωρίζουμε ότι: $\varphi_\nu = 180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$.

Επειδή $\varphi_\nu=150^o$, βρίσκουμε $150^o = 180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$

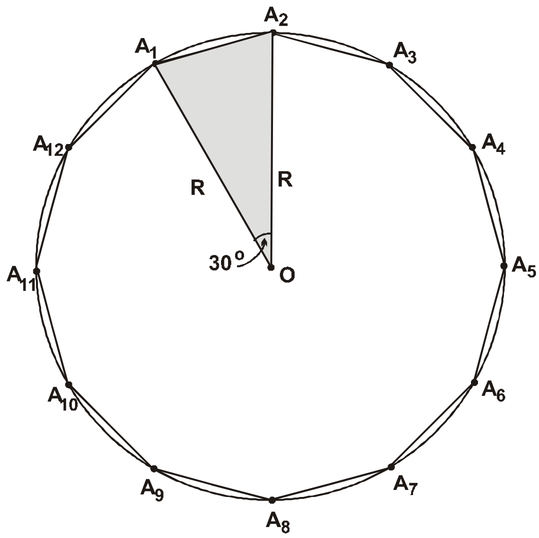
$$\frac{360^o}{\nu} = 30^o \;\Leftrightarrow\; \nu = \frac{360}{30} = 12.$$

Επομένως ο αριθμός των πλευρών του ζητούμενου κανονικού πολυγώνου είναι 12.

β. Γνωρίζουμε ότι: $\omega_\nu = \dfrac{360^o}{\nu}$.

Επομένως για ν=12, βρίσκουμε $\omega_{12} = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$.

γ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα είναι:



$$E_{12} = 12 \cdot (A_1OA_2) = 12 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 30^o = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} = 3R^2 \quad \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών γ=2, $\beta = 1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 8

<u>Απάντηση:</u>

α. Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A}$. Έτσι $\dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A}$. Άρα, $\eta\mu\mathrm{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή Α=$\dfrac{\pi}{4}$ (αφού το τρίγωνο είναι οξυγώνιο). Αντικαθιστώντας τώρα στο νόμο συνημιτόνων, έχουμε για την πλευρά α:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = (1+\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(1+\sqrt{2})\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} =$$

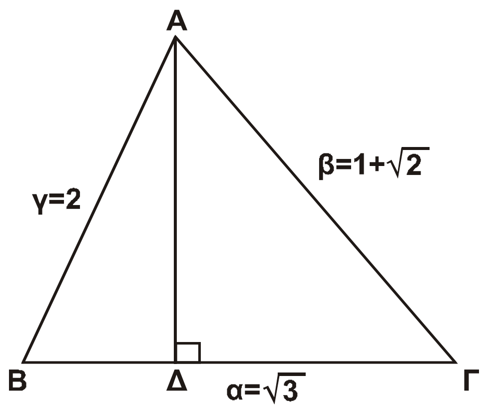
$$= 1+2\sqrt{2}+2+4-2\cdot(1+\sqrt{2})\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2+4-2\sqrt{2}-4 = 3$$

και συνεπώς $\alpha = \sqrt{3}$.

β. Από τον τύπο $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{R}}$ προκύπτει:

$$\frac{(1+\sqrt{2})2\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 2}{4\mathrm{R}} \Leftrightarrow \mathrm{R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \mathrm{R} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

γ.



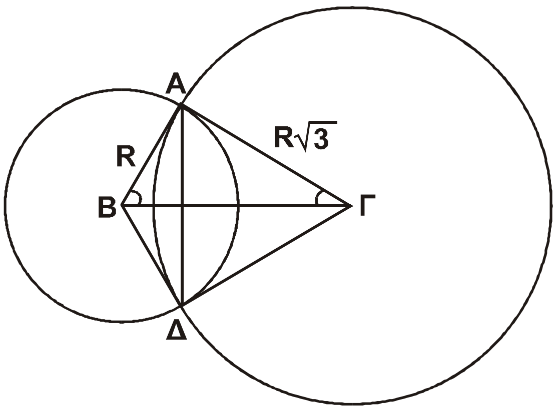
Ισχύει ότι $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\cdot\mathrm{B\Delta}$ (αφού το τρίγωνο είναι οξυγώνιο).

Άρα $(1+\sqrt{2})^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{B\Delta} \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+2 = 4+3-2\sqrt{3}\cdot\mathrm{B\Delta} \Leftrightarrow$

$$2\sqrt{3}\cdot\mathrm{B\Delta} = 4-2\sqrt{2} \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{3}}{3}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{A} = 90^{\circ})$ με μήκη πλευρών ΑΒ=R και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{R}\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και $(\Gamma,\ \mathrm{R}\sqrt{3})$.



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες B και Γ.

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

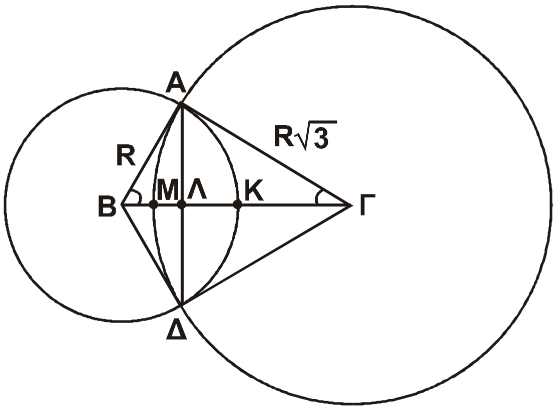
α. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2$. Δηλαδή $\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{R}^2+3\mathrm{R}^2=4\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2=4\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}=2\mathrm{R}$.

β. Αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB} = \mathrm{R} = \frac{2\mathrm{R}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ έχουμε $\hat{\Gamma}$=30°, οπότε $\hat{\mathrm{B}}$=60°.

γ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΓ είναι ίσα αφού ΑΒ=ΒΔ=R, ΑΓ=ΓΔ=$\mathrm{R}\sqrt{3}$, οπότε

(ΑΒΓ)=(ΒΓΔ), άρα (ΑΒΓΔ)=2(ΑΒΓ) = $2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$ τ.μ.

δ.



Το εμβαδόν του κοινού μέρους ΑΜΔΚΑ των δυο κύκλων ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων ΑΜΔΛΑ, ΑΚΔΛΑ.

Έτσι $E_{ΑΜΔΚΑ} = E_{ΑΜΔΛΑ} + E_{ΑΚΔΛΑ} = E_{ΑΜΔΓΑ} - E_{ΑΔΓ} + E_{ΑΒΔΚΑ} - E_{ΑΒΔ} =$

$$= \frac{\pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot 60}{360} + \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} - (E_{ΑΔΓ} + E_{ΑΒΔ}) = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{3} - E_{ΑΒΓΔ} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{3} - R^2\sqrt{3} = \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \cdot R^2 \quad \text{τ.μ.}$$