

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι ο $v^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι $a_v = a_1 + (v-1)\omega$.

Μονάδες 7

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν $\log_a \theta = x$, τότε:

α. $a^\theta = x$ **β.** $x^a = \theta$ **γ.** $a^x = \theta$

Μονάδες 3

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν S_v συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων v όρων μιας γεωμετρικής προόδου a_v με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο a_1 , τότε είναι:

α. $S_v = a_1 \frac{\lambda - 1}{\lambda^v - 1}$ **β.** $S_v = a_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ **γ.** $S_v = a_1 \frac{1 - \lambda^v}{\lambda - 1}$

Μονάδες 3

Δ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Ο τύπος που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας 2α είναι:

α. $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$ **β.** $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$ **γ.** $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$

Μονάδες 3

E. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = a\gamma$.

γ. Αν a είναι ένας θετικός αριθμός και $a \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα

Μονάδες 9

Απάντηση:

A. Θεωρία παρ. 3.2 σελ. 95.

B. Η σωστή απάντηση είναι η γ

Γ. Η σωστή απάντηση είναι η β

Δ. Η σωστή απάντηση είναι η α

E.α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ΑΘΡΟΙΣΜΑ των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta^2 = a\gamma$.

γ. Αν a είναι ένας θετικός αριθμός και $a \neq 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν}x(\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\text{συν}2x + 4\text{συν}x + 1)\eta\mu x$$

Μονάδες 12

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

$$\text{συν}2x + 4\text{συν}x + 1 = 0 .$$

Μονάδες 13

Απάντηση:

Είναι:

$$\begin{aligned} & \sin x (\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = \\ & = \sin x \eta\mu 2x + 4\eta\mu x \sin x = \\ & = 2\eta\mu x \sin^2 x + 4\eta\mu x \sin x = \\ & = \eta\mu x (2\sin^2 x + 4\sin x) = \\ & = \eta\mu x (\sin 2x + 1 + 4\sin x) = \\ & = (\sin 2x + 4\sin x + 1)\eta\mu x. \end{aligned}$$

Ακόμη:

$$\begin{aligned} & \sin 2x + 4\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 + 4\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\sin x (\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ή } \sin x = -2, \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \pi/2 \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = -11 + 2n$ με πρώτο όρο a_1 καθώς και το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $a_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε το άθροισμα $S = a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$, όπου $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου a_n .

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου a_n .

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Επειδή είναι:

$$\begin{aligned} a_{v+1} - a_v &= [-11 + 2(v+1)] - [-11 + 2v] = (-11 + 2v + 2) - (-11 + 2v) = \\ &= -11 + 2v + 2 + 11 - 2v = 2 \text{ για κάθε } v \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι η ακολουθία $a_n = -11 + 2n$ με $n \in \mathbf{N}^*$, είναι αριθμητική πρόοδος με:

- Πρώτο όρο $a_1 = -11 + 2 \cdot 1 = -11 + 2 = -9$ και
- Διαφορά $\omega = 2$

β. Έχουμε:

$$\begin{aligned} S &= a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21} = \\ &= (-11 + 2 \cdot 12) + (-11 + 2 \cdot 13) + \dots + (-11 + 2 \cdot 21) = \\ &= (-11) \cdot 10 + 2 \cdot (12 + 13 + \dots + 21) = \\ &= -110 + \frac{12+21}{2} \cdot 10 = -110 + 33 \cdot 10 = -110 + 330 = 220 \end{aligned}$$

γ. Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x - 3) - (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0$$

Άρα $x = 3$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως για:

- $x = 3$ έχουμε: $3 = -11 + 2v \Leftrightarrow 2v = 14 \Leftrightarrow v = 7$.
- $x = 1$ έχουμε: $1 = -11 + 2v \Leftrightarrow 2v = 12 \Leftrightarrow v = 6$.
- $x = -1$ έχουμε: $-1 = -11 + 2v \Leftrightarrow 2v = 10 \Leftrightarrow v = 5$.

Άρα:

- Η ρίζα $x = 3$ είναι ο 7^{ος} όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο a_7).
- Η ρίζα $x = 1$ είναι ο 6^{ος} όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο a_6).
- Η ρίζα $x = -1$ είναι ο 5^{ος} όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο a_5).

Σημείωση:

Το ερώτημα (β.) θα μπορούσε να απαντηθεί και ως εξής:

$$\text{1^{ος} τρόπος: } S = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{21}}{2} \cdot 10$$

$$\text{2^{ος} τρόπος: } S = S_{21} - S_{11} \text{ όπου } S_{21} = a_1 + a_2 + \dots + a_{12} + \dots + a_{21} \\ \text{και } S_{11} = a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Πρέπει

$$\bullet e^{2x} - 2e^x + 3 > 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε

$$y^2 - 2y + 3 > 0 \quad (2)$$

και επειδή $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$,

προκύπτει ότι η (2) αληθεύει για κάθε $y \in \mathbf{R}$, άρα και η (1) για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbf{R} .

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0$. Επειδή η συνάρτηση $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} προκύπτει ότι $x > 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln(3e^x - 3). \text{ Άρα}^1$$

$$e^{2x} - 2e^x + 3 = 3e^x - 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Λύνοντας, τώρα, τη δευτεροβάθμια εξίσωση λαμβάνουμε:

$$y = 2 \text{ ή } y = 3.$$

Για

- $y = 2$ έχουμε $e^x = 2$ οπότε $x = \ln 2$
- $y = 3$ έχουμε $e^x = 3$ οπότε $x = \ln 3$

Οι παραπάνω ρίζες είναι δεκτές αφού ανήκουν στο $(0, +\infty)$, το οποίο αποτελεί και την τομή των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g .

γ. Έχουμε:

$$f(x) > 2g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2[\ln 3 + \ln(e^x - 1)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2\ln(3e^x - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln(3e^x - 3)^2.$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ προκύπτει ότι
 $e^{2x} - 2e^x + 3 > (3e^x - 3)^2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 3 > 9e^{2x} - 18e^x + 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4e^{2x} - 8e^x + 3 < 0.$

Θέτουμε $e^x=y>0$ και έχουμε:

$$4y^2 - 8y + 3 < 0 \Leftrightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1/2) < y < (3/2) \Leftrightarrow (1/2) < e^x < (3/2) \Leftrightarrow e^{\ln(1/2)} < y < e^{\ln(3/2)}.$$

Επειδή η συνάρτηση $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} , προκύπτει ότι:

$$\ln \frac{1}{2} < x < \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln 1 - \ln 2 < x < \ln \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\ln 2, \ln \frac{3}{2}\right). \text{ Όμως, επειδή } x \in (0, +\infty) \text{ λόγω της τομής των πεδίων}$$

ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ προκύπτει ότι η λύση της ανίσωσης $f(x) > 2g(x)$ είναι το διάστημα $\left(0, \ln \frac{3}{2}\right)$.

¹ Σημείωση: Για την ακριβέστερη μαθηματική τεκμηρίωση θα πρέπει να τεθεί: «η συνάρτηση $h(x)=\ln x$ είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$ » χωρίς, όμως, η παράλειψή του να έχει βαθμολογικές απώλειες.