

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

24 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Θεωρία: Εύρος μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.

A2. α) $\rightarrow \Sigma$, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Lambda$, δ) $\rightarrow \Lambda$, ε) $\rightarrow \Sigma$.

A3.

α) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, με $x > 0$.

β) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

γ) Αν f συνεχής στο \mathbb{R} με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_a^a f(x) dx = 0$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x < 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x - 3.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 3) = 4 - 3 = 1.$$

B2. Για $x > 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \sqrt{x} + 2 - 3 = \sqrt{x} - 1.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x} - 1) = \sqrt{4} - 1 = 1.$$

B3. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 4$, πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a = 1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα		40	1800		100

- Γ2.** Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει: $\bar{x} = \frac{1800}{40} = 45$.
- Γ3.** Από τον ίδιο πίνακα προκύπτει ότι ηλικία τουλάχιστον 45 ετών έχουν: $15 + 6 = 21$ εργαζόμενοι.
- Γ4.** Από τη στήλη της σχετικής συχνότητας του πίνακα προκύπτει ότι ηλικία κάτω των 35 ετών έχουν το 17,5 % των εργαζομένων.

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)' = 3x^2 - 12x + 9 = \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1) \cdot (x-3), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών.

x		$-\infty$		1		3		$+\infty$		
f'		+		○		-		○		+
f		↗			↘			↗		
		T.M.			T.E.					

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

- Δ2.** Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$, την τιμή $f(1) = 5$, ενώ έχει και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 3$, την τιμή $f(3) = 1$.
- Δ3.** Είναι $I = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$.
- Δ4.** Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^3 |g(x)| dx$$

Όμως επειδή είναι $g(x) = f'(x)$ γνωρίζουμε από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ ότι είναι

α) για $x \in [0, 1]$: $g(x) = f'(x) \geq 0$.

β) για $x \in [1, 3]$: $g(x) = f'(x) \leq 0$.

Έτσι είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |g(x)| dx + \int_1^3 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^3 = \\ &= f(1) - f(0) - f(3) + f(1) = 5 - 1 - 1 + 5 = 8 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$