ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελ. 93α

Α2. Ορισμός στη σελ. 87γ

Α3. Ορισμοί στη σελ. 140

Α4. α. → Σ

β. → Λ

γ. → Σ

δ. → Λ

ε. → Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Για $x \neq 1$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} =$$

επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = 1$$

Β2 Για κάθε x πραγματικό αριθμό έχουμε:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

επομένως $f'(0) = -1$

Β3 Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον οριζόντιο άξονα έχουμε ότι εφω = - 1 δηλαδή ω = 135.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Αρχικά η πρώτη κλάση είναι $[0, c)$ ενώ η δεύτερη κλάση είναι της μορφής $[c, 2c)$ άρα $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

οπότε κλάσεις είναι $[0, 4)$, $[4, 8)$, $[8, 12)$, $[12, 16)$, $[16, 20)$ και τα κέντρα των κλάσεων είναι: $2, 6, 10, 14, 18$

Γ2

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[0 – 4)	2	20	40	–8	64	1280
[4 – 8)	6	40	240	–4	16	640
[8 – 12)	10	45	450	0	0	0
[12 – 16)	14	30	420	4	16	480
[16 – 20)	18	25	450	8	64	1600
ΣΥΝΟΛΟ		160	1600			4000

Όπου:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10 \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{4000}{160} = 25 \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5$$

Γ3 Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού, $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$ δηλαδή 50% (μεγαλύτερο του 10%)

Γ4 Κατά την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, θα πρέπει να θεωρούμε ότι τα στατιστικά δεδομένα κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση. Έτσι από [4,6) έχουμε 20 παρατηρήσεις, και από [6,8) έχουμε άλλες 20 παρατηρήσεις, οπότε από [7,8) έχουμε 10 παρατηρήσεις, άρα συνολικά από 7 έως 14 κιλά έχουμε 10+45+ 30/2 =10+ 45 +15 =70 παρατηρήσεις

Επομένως η πιθανότητα είναι: 70/160 = 7/16 (από τον ορισμό της κλασσικής πιθανότητας, ευνοϊκές περιπτώσεις προς δυνατές περιπτώσεις)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$$f(x)=\ln\left(x-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(x-P(A)\right)^2+P(B),\ x>P(A)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}\left(x-P(A)\right)'-\frac{1}{2}2\left(x-P(A)\right)\left(x-P(A)\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}-\left(x-P(A)\right)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1-\left[x-P(A)\right]^2}{x-P(A)},\quad x>P(A)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\left[x-P(A)\right]^2}{x-P(A)}=0\Leftrightarrow 1-\left(x-P(A)\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-P(A)\right)^2=1\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}x-P(A)=1\Leftrightarrow x=1+P(A)$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)}>0\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}1-\left(x-P(A)\right)^2>0$$

$$\left(x-P(A)\right)^2<1\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}x-P(A)<1\Leftrightarrow x<1+P(A)$$

x	P(A)	1+P(A)	$+\infty$
f′	+	0	−
f	↗	Ολ. Μεγ.	↘

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο χ = 1 + P(A), ενώ είναι γν. αύξουσα στο διάστημα ((P(A),1+P(A)) και γν. φθίνουσα στο (1+P(A), ∞).

Δ2 Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1 + P(A)$ είναι

$1 + P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ Και η τιμή του ακρότατου είναι :

$$f(1 + P(A)) = P(B) - \frac{1}{2}, \text{ άρα } P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

Δ3

Έχουμε,

$$P\left(\left(A \bigcap B\right)'\right) = 1 - P\left(A \bigcap B\right) = 1 - P(A) - P(B) + P\left(A \bigcup B\right) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

Δ4 $$P\left((A - B) \bigcup (B - A)\right) = P(A) + P(B) - 2P\left(A \bigcap B\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$