

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Απαντήσεις Θεμάτων

Θεμα Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258

A4. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

Θεμα Β

B1. 1^{ος} τρόπος

Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$(z - 1)\overline{(z - 1)} + (z + 1)\overline{(z + 1)} = 4$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1) + (z + 1)(\bar{z} + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

2^{ος} τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \Leftrightarrow 2|z|^2 + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

B2. Έστω $M(z_1)$, $N(z_2)$ και $N'(-z_2)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 και $-z_2$. Το N' είναι το αντιδιαμετρικό του N στον κύκλο. Δηλαδή NN' διάμετρος.

$$\text{Ισχύουν } |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{MN}|$$

$$|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{MN'}|$$

Η γωνία NMN' βαίνει σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο NMN' έχουμε:

$$|\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{MN'}|^2 = |\overrightarrow{NN'}|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = (2\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + |z_1 + z_2|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

2^{ος} τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

B3. Από τη σχέση (2) θέτοντας $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$|x + yi - 5(x - yi)| = 12$$

$$\Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12$$

$$\Leftrightarrow |-4x + 16yi|^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (C_2)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι έλλειψη με $a = 3, \beta = 2$ και $\gamma^2 = a^2 - \beta^2 = 5$ δηλαδή $\gamma = \sqrt{5}$, αφού $\gamma > 0$.

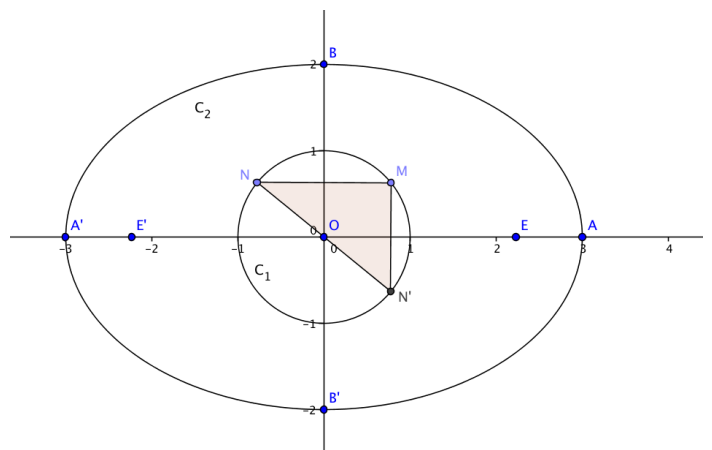
Οι εστίες της έλλειψης είναι $E'(-\sqrt{5}, 0)$ και $E(\sqrt{5}, 0)$

Ισχύει: $\beta \leq |w| \leq a$

Συνεπώς $|w|_{max} = a = 3$ και

$|w|_{min} = \beta = 2$

B4. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:



$$||z| - |-w|| \leq |z + (-w)| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow |1 - |w|| \leq |z - w| \leq 1 + |w| \quad (1),$$

εφόσον $|z| = 1$

$$\text{Όμως } |w|_{\max} = 3 \text{ συνεπώς } 1 + |w| \leq 1 + |w|_{\max} = 4 \quad (2)$$

$$\text{και } |w|_{\min} = 2 \text{ οπότε } |1 - |w|| \geq |1 - |w|_{\min}| = 1 \quad (3)$$

Τελικά από (1), (2), (3) προκύπτει: $1 \leq |z - w| \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$.

Ισχύει: $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

- η f είναι συνεχής στο $\Delta_1 = (0,1]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$

$$\text{Άρα: } f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [-1, +\infty), \quad \text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

- Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_2

$$\text{Άρα: } f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) = [-1, +\infty)$$

Επειδή: $A_f = \Delta_1 \cup \Delta_2$ για το σύνολο τιμών της f έχουμε: $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$.

Γ2. Για την εξίσωση έχουμε:

$$x^{x-1} = e^{2013}, \quad \text{με } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^{x-1} = 2013$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln x - 1 = 2012$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$$

Επειδή: $2012 \in f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1 \in (0,1)$,

αφού f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Επειδή: $2012 \in f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$,

αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 .

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες: $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$

Γ3.

Ισχύουν: $f(x_1) = 2012$ με $x_1 \in (0,1)$
 $f(x_2) = 2012$ με $x_2 \in (1, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = f'(x) + f(x) - 2012 \text{ με } x \in [x_1, x_2]$$

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών αφού η f' είναι συνεχής (εφόσον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη)
- $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1) + 2012 - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1)$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = \ln x_1 + \frac{x_1 - 1}{x_1} < 0, \quad \text{αφού } x_1 \in (0,1)$$

$$\text{και } g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2) + 2012 - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = \ln x_2 + \frac{x_2 - 1}{x_2} > 0, \quad \text{αφού } x_2 \in (1, +\infty)$$

$$\text{Άρα: } g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $g(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

2ος τρόπος

Η λύση προκύπτει και με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση:

$$h(x) = e^x f(x) - 2012 e^x \text{ στο } x \in [x_1, x_2].$$

Γ4. Είναι: $g(x) = f(x) + 1 \geq 0$ αφού ισχύει $f(x) \geq -1$, για κάθε $x > 0$

Οπότε: $g(x) = (x - 1) \ln x$ για $x > 0$

Λύνω την εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = e$

Επομένως:

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x - 1) \cdot \ln x dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot (\ln x)' dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1 \right]$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2 - 3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$\int_1^{x^2-x+1} -f(t) dt \geq \frac{x - x^2}{e} \Leftrightarrow e \cdot \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt + x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$$

όπου έχουμε θεωρήσει την συνάρτηση:

$$g(x) = e \cdot \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt + x^2 - x, x \in (0, +\infty)$$

Ισχύουν:

- η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$
- το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο 1, με

$$g'(x) = ef(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) + 2x - 1 \text{ και } g'(1) = ef(1) + 1.$$

Σύμφωνα με το Θ. Fermat θα ισχύει: $g'(1) = 0 \Leftrightarrow ef(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Αφού $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\text{Ισχύει: } \ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot (-f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = f(x) \cdot \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + ef(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \quad (1)$$

Επειδή:

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)}$$

(Έχουμε: $\ln x - x < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$, για κάθε $x > 0$.)

Συνεπώς πρέπει: $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e > 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη, αφού η $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

και συνεπώς η $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)$ είναι παραγωγίσιμη.

$$\text{Θέτουμε: } h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

και η (1) γράφεται:

$$h'(x) = h(x) + e \Leftrightarrow h'(x) - h(x) = e \Leftrightarrow e^{-x} \cdot h'(x) - e^{-x} \cdot h(x) = e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x}h(x)]' = (-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x}h(x) = -e^{1-x} + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι: } e^{-1} \cdot h(1) = -1 + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{και τελικά } e^{-x}h(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow h(x) = e^x - e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt = e^x - e$$

$$\text{Με παραγωγήσιμη παίρνουμε } \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x), \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
\Delta 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] &= \\
&= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{u^2} \eta \mu u - \frac{1}{u} \right], \quad \text{θέτοντας } u = \frac{1}{f(x)} \text{ με } u \rightarrow 0^- \text{ καθώς } x \rightarrow 0^+ \\
&= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta \mu^u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) \\
&= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma \nu \nu u - 1}{2u} \stackrel{DLH}{=} \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma \nu \nu u - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$\begin{aligned}
F'(x) = f(x) \text{ και } F''(x) = f'(x) &= \left(\frac{\ln x - x}{e^x} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x - (\ln x - x) \cdot e^x}{(e^x)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} + (x - 1 - \ln x)}{e^x} > 0
\end{aligned}$$

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

- Η F είναι συνεχής στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$
- η F είναι συνεχής στα $(x, 2x)$ και $(2x, 3x)$

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$ (έχουν νόημα αφού $x > 0$)

εξασφαλίζουμε $\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ ώστε να ισχύουν:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Όμως F' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα :

$$\begin{aligned}
\xi_1 < \xi_2 &\Leftrightarrow F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \\
&\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(3x) + F(x) > 2F(2x)
\end{aligned}$$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση: $\Phi(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

- Φ συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$
- $\Phi(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$

$$\Phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0, \text{ από το ερώτημα } \Delta_3.$$

Όμως είναι: $F'(x) = f(x) < 0$ και άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και αφού $\beta < 3\beta \Leftrightarrow F(\beta) > F(3\beta)$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε να ισχύει:

$$\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$$

Επειδή: $\Phi'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$, η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η λύση $x = \xi$ είναι μοναδική.