

Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης¹

ΘΕΜΑ 1

- A. Σχολικό βιβλίο Σελ. 251.
B. Σχολικό βιβλίο Σελ. 213.
Γ.
α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος



ΘΕΜΑ 2

- A.
α. Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2\lambda + 1 \\ -y = -2\lambda + 1 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} x - y = 2 \Leftrightarrow \boxed{y = x - 2}$$

η οποία είναι η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας

- β. Είναι:

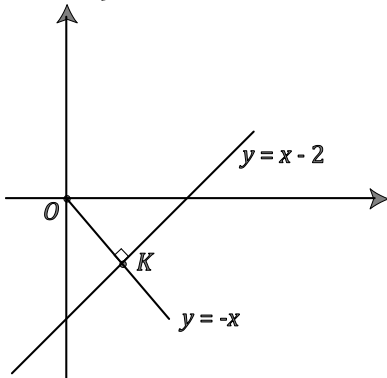
$$|z| = \sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2} = \sqrt{8\lambda^2 + 2}$$

¹ Οι λύσεις που παρουσιάζονται είναι ενδεικτικές αλλά, όχι υποχρεωτικά και μοναδικές

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009
 Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

το οποίο γίνεται ελάχιστο για $\lambda = 0$, δηλαδή για τον μιγαδικό $z_0 = 1 - i$.

Άλλος τρόπος



Γεωμετρικά, ως το σημείο K που είναι η τομή των ευθειών $y = x - 2$ και $y = -x$. Όλος περιέργως αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος λύσης που συνάντησα διαβάζοντας δεκάδες λύσεις από διάφορα φροντιστήρια!!!

Η λύση που προτείνω παραπάνω θεωρώ πως είναι πολύ απλούστερη. Άλλωστε δε καταλαβαίνω γιατί πρέπει να επιστρατεύσουμε γεωμετρική προσέγγιση για ένα τόσο απλό ερώτημα, εκτός αν πλέον ο εγκλωβισμός της σκέψης μας έχει φτάσει σε τέτοιο επίπεδο που έχει «πακετάρει» ότι όταν στους μιγαδικούς βλέπουμε στην εκφώνηση να λέει «μέγιστο» (ή «ελάχιστο») πάμε με κλειστά μάτια για γεωμετρική λύση...

B. Θέτουμε $w = a + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13) - (\beta - 1)i = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 3, -4 \\ \beta = 1 \end{array} \right\}$$

οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι: $3 + i$ και $-4 + i$.



ΘΕΜΑ 3

A. Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$$

δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x = 0$ ολικό ελάχιστο. Επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει το θεώρημα του Fermat, οπότε:

$$f'(0) = 0 \quad (1)$$

Αλλά είναι:

