
Λύσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Λυκείου 2008

- Θέμα 1** A. Σχολικό βιβλίο σελ. 28
B. Σχολικό βιβλίο σελ. 96
Γ. Λάθος Λάθος Σωστό Σωστό Σωστό

Θέμα 2 α. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$

β. Είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x+1)}{(e^x)^2} = \frac{2-x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα $e^x \cdot f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$

γ. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$	\nearrow		\searrow

Η f παρουσιάζει στο 2 μέγιστο το $f(2) = \frac{1}{e^2}$.

Θέμα 3 α. Μέση τιμή του $\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = \frac{110}{5} = 22$

Μέση τιμή του $\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = \frac{120}{5} = 24$

β. Για την μπαταρία τύπου A έχουμε: οι 22 χιλιάδες ώρες κοστίζουν 38€, άρα οι χίλιες ώρες κοστίζουν $\frac{38}{22} \approx 1,72\text{€}$. Για την μπαταρία τύπου B έχουμε: οι 24 χιλιάδες ώρες κοστίζουν 40€, άρα οι χίλιες ώρες κοστίζουν $\frac{40}{24} \approx 1,66\text{€}$. Άρα συμφέρει να αγοράσουμε την μπαταρία τύπου B γιατί $1,66 < 1,72$.

γ.

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x}_A)^2}{5} = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} \\ &= \frac{4 + 16 + 4 + 0 + 16}{5} = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } s_A = \sqrt{s_A^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x}_B)^2}{5} = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} \\ &= \frac{4 + 64 + 25 + 16 + 1}{5} = 22 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } s_B = \sqrt{s_B^2} = \sqrt{22}.$$

$$\delta. CV_A = \frac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}.$$

$$CV_B = \frac{s_B}{|\bar{x}_B|} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{24} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3,3}{24}.$$

$$\text{Άρα } \frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{\sqrt{2} \cdot 3,3}{24}} = \frac{24 \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot \sqrt{2} \cdot 3,3} = \frac{24}{36,3} < 1. \text{ Άρα } CV_A < CV_B, \text{ δηλαδή το } A$$

έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το B .

Θέμα 4 α. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A : «Να διαβάζουν την εφημερίδα τύπου α »

B : «Να διαβάζουν την εφημερίδα τύπου β »

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B') = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - \frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\beta. \text{ Ισχύει ότι: } A \cap B \subseteq B \text{ άρα } P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq P(B)$$

$$B \subseteq A' \cup B, \text{ άρα } P(B) \leq P(A' \cup B) \Leftrightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

$\gamma.$ Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot P(B) = 1 - 12P(B)$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \geq -12P(B) \geq -12 \cdot \frac{7}{10} \Leftrightarrow -\frac{84}{10} \leq -12P(B) \leq \\ -\frac{12}{5} \Leftrightarrow 1 - \frac{84}{10} \leq 1 - 12P(B) \leq 1 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow -\frac{74}{10} \leq \Delta \leq -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

Άρα $\Delta < 0$ οπότε $f'(x)$ ομόσημο του 3, δηλαδή $f'(x) > 0$. Άρα η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε δεν έχει ακρότατα.