***Θέμα 1*** Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 235

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 191

Γ. Σωστό Σωστό Λάθος Λάθος Σωστό

***Θέμα 2*** α. Είναι $|(i+2\sqrt{2}| = 6 \Leftrightarrow |i+2\sqrt{2}| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8}|z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2.$

Επομένως είναι κύκλος με κέντρο $O(0,\ 0)$ και $\rho = 2$.

β. Έχουμε

$$|w-(1-i)| = |w-(3-3i)| \overset{w=x+yi}{\Longleftrightarrow} |x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

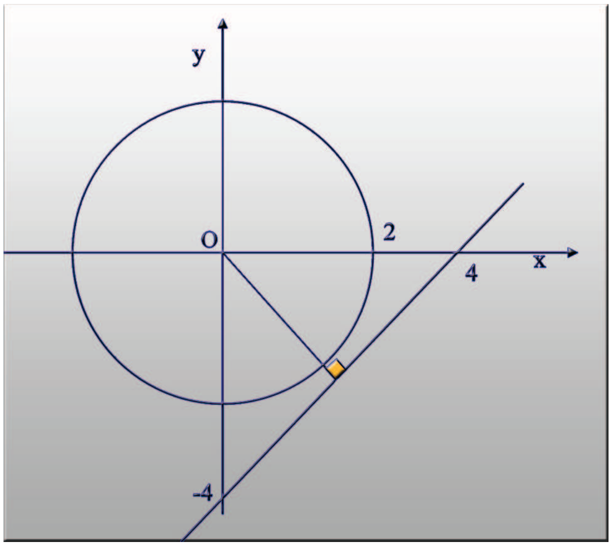
$$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i| = |(x-3)+(y+3)i| \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-4y-16 = 0 \Leftrightarrow x-y-4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon : x-y-4 = 0$$

γ. $min|w| = d(O,\ \varepsilon) = \dfrac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$

δ. Είναι $d(O,\ \varepsilon) = 2\sqrt{2} > 2$




Άρα $min|z-w| = d(O,\ \rho) - \rho = 2\sqrt{2} - 2.$

***Θέμα 3*** α. Αρκεί να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{(-\infty)}{(+\infty)}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$$

β. Για $x > 0$ η $f$ είναι παραγωγίσιμη: $f'(x) = \ln x + 1$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

| x | 0 | | 1/e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | | ↘ | | ↗ | |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\ \frac{1}{e}\right]$ επειδή η $f$ συνεχής στο 0.

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$.

Αν $\Delta_1 = \left[0,\ \frac{1}{e}\right]$ τότε το $f(\Delta_1) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e},\ 0\right]$ επειδή $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$ και $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

Αν $\Delta_2 = \left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ είναι $f(\Delta_2) = (\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x),\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)) = \left(-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ επειδή $f$ γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Τελκά $f([0,\ +\infty)) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$

γ. Είναι

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \alpha = x \ln x \Leftrightarrow f(x) = \alpha,\ x > 0\ (1)$$

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε $\alpha \notin f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$, άρα η (1) δεν έχει καμία ρίζα.
- Αν $\frac{1}{e} < \alpha \leq 0$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$, τότε επειδή η $f$ είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1$ και $\Delta_2$ η (1) έχει δύο ακριβώς ρίζες.
- Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha \in f(\Delta_2)$ και επειδή $f$ γνησίως μονότονη στο $\Delta_2$ η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα.
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και επειδή $f$ γνησίως μονότονη στο $\Delta_1$ η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα.

δ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μέσης τιμής για την $f$ στο $[x,\ x+1]$.

Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(x,\ x+1)$

Η $f$ συνεχής στο $[x,\ x+1]$ Άρα υπάρχει $\xi \in (x,\ x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$.

Είναι $f'$ παραγωγίσιμη για $x > 0$, άρα $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για $x > 0$. Οπότε $f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$. Για $x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$ άρα $f(x+1) - f(x) < f'(x+1), x > 0$

***Θέμα 4*** α. Θέτουμε $\int_0^2 f(t)dt = c$. Από υπόθεση $f(x) = (10x^3 + 3x)\cdot c - 45$
Επομένως

$$\int_0^2 f(t)dt = c \Leftrightarrow \int_0^2 [(10t^3+3t)\cdot c - 45]dt = c \Leftrightarrow \left[\left(\frac{10t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right)\cdot c - 45t\right]_0^2 = c$$

$$\left(10\cdot\frac{2^4}{4} - 0 + 3\cdot\frac{4}{2} - 0\right)\cdot c - 45\cdot 2 + 45\cdot 0 = c \Leftrightarrow 46c - 90 = c \Leftrightarrow 45c = 90 \Leftrightarrow c = 2$$

β. Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g'(x)-g'\big(x+(-h)\big)}{-h} = \lim_{-h\to 0}\frac{g'\big(x+(-h)\big)-g'(x)}{-h} \overset{-h=\kappa}{=}$$
$$= \lim_{\kappa\to 0}\frac{g'(x+\kappa)-g'(x)}{\kappa} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} = g''(x)$$

γ. i. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{h} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)-g'(x-h)+g'(x)}{h} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} + \frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\big(g''(x)+g''(x)\big) = g''(x)$$

Άρα $g''(x) = f(x) + 45$. Οπότε $g''(x) = 20x^3 + 6x - 45 + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x$.

$$g'(x) = 20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} + c_1$$

Έχουμε $g'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$
$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$, όμως $g(0) = 1$, άρα $c_2 = 1$.
Τελικά $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii. $g$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $g$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $g$ "1-1".