ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2007

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8

Β.

α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_j εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_j.

Μονάδες 2

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Μονάδες 2

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = x^\nu$, όπου ν φυσικός
$f_2(x) = \ln x$, όπου $x > 0$
$f_3(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$
$f_4(x) = $ συν x, όπου x πραγματικός

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{ -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ για τον οποίο ισχύει:

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2\,P(3) = 2\,P(4) = 2\,P(5).$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω:

$$A = \{ 1, 3, x^2 - x - 3 \}, \quad B = \{ 2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1 \}$$

όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω, δηλαδή οι:
$P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$.

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{ -1, 3 \}$

Μονάδες 8

γ. Για $x = -1$ να δειχθεί ότι:

$$P(A) = 5/11, \quad P(B) = 7/11, \quad P(A \cap B) = 3/11$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε 2 δείγματα Α και Β με παρατηρήσεις:

Δείγμα Α: $12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δείγμα Β: $16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$, $\bar{x}_B$ και των δύο δειγμάτων Α και Β αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$.

Μονάδες 7

β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Α και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Β, να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = 16/25$

Μονάδες 8

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Α είναι ίσος με $CV_A = 1/15$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος Β.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 152)

Β.
α. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 22)
β. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 87)

Γ1. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$

Γ2.
$f_1'(x) = \nu x^{\nu-1}$, $x \in \mathbb{R}$
$f_2'(x) = 1/x$, $x > 0$
$f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
$f_4'(x) = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με:
$f'(x) = (xe^x + 3)' = e^x + xe^x = e^x + f(x) - 3$
διότι $f(x) = xe^x + 3 \Leftrightarrow xe^x = f(x) - 3$

β. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x+f(x)-3-e^x}{x^2-x} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{xe^x+3-3}{x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{xe^x}{x(x-1)} =$$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = -1$. (Επειδή η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ $-\{1\}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.)

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού Ω = {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}, είναι
$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$.

Έστω $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5) = \kappa$.
Τότε
$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \kappa$, ενώ $P(3) = P(4) = P(5) = \kappa/2$.

Έτσι είναι
κ + κ + κ + κ + (κ/2) + (κ/2) + (κ/2) = 1 $\Leftrightarrow$

$$4\kappa + \frac{3\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow 8\kappa + 3\kappa = 2 \Leftrightarrow 11\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{11}.$$

Άρα
P(–1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2/11 ενώ P(3) = P(4) = P(5) = 1/11.

β. Αφού A $\cap$ B $\subseteq$ A $\Rightarrow$ {–1, 3} $\subseteq$ {1, 3, x^2 – x – 3}
Άρα –1 $\in$ {1, 3, x^2 – x – 3}.
Οπότε $x^2 - x - 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

- Για x = 2 το ενδεχόμενο B γράφεται: B = {2, 3, 8, –3}

Τότε όμως A $\cap$ B = {3} $\neq$ {–1, 3}
Άρα η τιμή x = 2 απορρίπτεται.

- Για x = –1 το ενδεχόμενο B γράφεται: B = {2, 0, –1, 3}

Τότε A $\cap$ B = {–1, 3} και η τιμή **x = –1** είναι η ζητούμενη τιμή.

γ. Για x = –1 είναι A = {1, 3, –1 } και B = {2, 0, –1, 3}.
Τότε

- P(A) = P(1) + P(3) + P(–1) $= \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$.

- P(B) = P(2) + P(0) + P(–1) + P(3) $= \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$.

- P(A $\cap$ B) = P(–1) + P(3) $= \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$.

- P(A – B) = P(A) – P(A $\cap$ B) $= \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$.

- P(A $\cup$ B΄) = P(A) + P(B΄) – P(A $\cap$ B΄)=

= P(A) + 1 – P(B) – [P(A) – P(A $\cap$ B)] =
= 1 – P(B) + P(A $\cap$ B) $= 1 - \frac{7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{7}{11}$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$\bar{x}_A = \frac{12 + 18 + t_3 + t_4 + ... + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 14 + t_3 + t_4 + ... + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

β.

$$S_A^2 = \frac{1}{25}\left[(12-15)^2 + (18-15)^2 + (t_3-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2\right]$$

$$S_B^2 = \frac{1}{25}\left[(16-15)^2 + (14-15)^2 + (t_3-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2\right]$$

Έτσι $S_A^2 - S_B^2 = \frac{1}{25}\left(3^2 + 3^2 - 1^2 - 1^2\right) = \frac{16}{25}$.

γ.

$$S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{S_A^2}{(\bar{x}_A)^2} - \frac{S_B^2}{(\bar{x}_B)^2} = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{CV_A})^2 - (\mathrm{CV_B})^2 = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow \frac{1}{225} - (\mathrm{CV_B})^2 = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{CV_B})^2 = \frac{1}{225} - \frac{16}{25 \cdot 225} \Rightarrow (\mathrm{CV_B})^2 = \frac{1}{225}\left(1 - \frac{16}{25}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{CV_B})^2 = \frac{9}{225 \cdot 25} \Rightarrow \mathrm{CV_B} = \frac{3}{15 \cdot 5} \Rightarrow \mathrm{CV_B} = \frac{1}{25}.$$