ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2006

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR. και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x),\ x \in \mathrm{IR}\ .$$

Μονάδες 10

Β.α. Πότε δύο ενδεχόμενα Α,Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

Μονάδες 2

β. Αν το ενδεχόμενο Α΄, συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α, πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το Α.

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

Μονάδες 2

δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	α+4
1	5α+8
2	4α
3	α-1
4	2α
Σύνολο	50

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 3

Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

Μονάδες 7

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

Μονάδες 8

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2+kx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο Α(1,f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι k = 2 και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

β. Μία τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\frac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16).

Μονάδες 10

(ii)Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α > 0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

$B_α$. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

$B_β$. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

Γ. α - Σ
β - Σ
γ - Λ
δ - Λ

Θέμα 2ο

α.

$$a+4+5a+8+4a+a-1+2a=50$$

$$13a=39$$

$$a=3$$

β.

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	50	77	

$$\overline{x} = \frac{0+23+24+6+24}{50} = \frac{77}{50}.$$

γ. $\delta = \dfrac{t_{25}+t_{26}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

δ. Έστω Α το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

Τότε $P(A) = \dfrac{8}{50} = \dfrac{4}{25}$.

Θέμα 3ο

α. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος. Τότε Ν(Ω) = x + (x + 4)^2.
Αν Α το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι τότε Ν(Α) = x.
Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{x}{x + (x+4)^2}$, $x \in \mathrm{R}$
(Σύμφωνα με διευκρίνιση που δόθηκε κατά τη διάρκεια των εξετάσεων).
Επειδή όμως ο x εκφράζει τον αριθμό των αγοριών είναι $x \geq 0$. Οπότε είναι και $0 \leq x \leq x + (x+4)^2$ άρα $0 \leq \dfrac{x}{x+(x+4)^2} \leq 1$.

β. $P(A) = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+(x+4)^2} = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \quad \acute{\eta} \quad x = 8)$

- Αν x = 8 τότε Ν(Ω) = 8 + (8 + 4)^2= 152 > 100.

Άρα η τιμή x = 8 απορρίπτεται.

- Αν x = 2 τότε Ν(Ω) = 2 + (2 + 4)^2= 38 < 100.

Άρα η τιμή x = 2 είναι δεκτή.

Αν Κ είναι το ενδεχόμενο να επιλεγεί κορίτσι, τότε
Ν(Κ) = (2 + 4)^2 = 36, οπότε $P(K) = \dfrac{N(K)}{N(\Omega)} = \dfrac{36}{38} = \dfrac{18}{19}$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x+(x+4)^2}$, $\quad x \geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με:

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 16}{\left[x + (x+4)^2\right]^2}, \quad x \geq 0.$$

Από τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0		4		+∞
f'		+		-	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{17}$	$\searrow$	

προκύπτει ότι η f έχει για x = 4 μέγιστη τιμή $f(4) = \dfrac{1}{17}$.

Οι τιμές της Ρ(Α) είναι ένα υποσύνολο από διακριτές τιμές του συνόλου τιμών της f.

Συγκεκριμένα η P(A) παίρνει τιμές από το σύνολο B = {f(1), f(2), f(3),f(4),f(5), ... }, όπου B $\subseteq$ f(A).
Επειδή $f(x) \le f(4)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ το σύνολο f(A) έχει μέγιστη τιμή $f(4) = \frac{1}{17}$ που είναι μία από τις τιμές του συνόλου B.

Οπότε η μέγιστη τιμή που παίρνει η P(A) είναι $\frac{1}{17}$ με αντίστοιχο αριθμό αγοριών 4.

Θέμα 4ο

α. Η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \ge 0$ είναι παραγωγίσιμη για x > 0 με $f'(x) = -4x + k + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(1, f(1)) είναι παράλληλη στον x΄x προκύπτει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Για k = 2 είναι $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$

οπότε f(1) = 14 και το σημείο A(1, f(1)) είναι το A(1,14).

Αφού τώρα η εφαπτομένη της C_f στο A είναι οριζόντια, η εξίσωσή της είναι y = 14.

β. $\bar{x} = f(1) = 14$

$f'(4) = -13$, άρα $s = -\frac{2(-13)}{13} = 2$

(i) Αφού η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 14$ και τυπική απόκλιση s = 2 έχουμε την ακόλουθη κατανομή:

Τιμές της Χ	8	10	12	14	16	18	20	
Ποσοστό	0,15%	2,35%	13,50%	34%	34%	13,50%	2,35%	0,15%

Αφού 3 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 8 είναι

$\frac{0,15}{100} \cdot \nu = 3 \Leftrightarrow \nu = 2000$

Στο διάστημα (10, 16) όπως προκύπτει από το προηγούμενο διάγραμμα βρίσκονται 81,5% του συνόλου ν = 2000 των παρατηρήσεων, δηλαδή $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ παρατηρήσεις.

(ii) Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι

$$\text{cv} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 0,14 > 0,10$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν προστεθεί ο α > 0 σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ο νέος συντελεστής μεταβλητής είναι $\frac{2}{14+\alpha}$.

Θέλουμε $\frac{2}{14+\alpha} \leq 0{,}10 \Leftrightarrow 2 \leq 1{,}4 + 0{,}1\alpha \Leftrightarrow 0{,}1\alpha \geq 0{,}6 \Leftrightarrow \alpha \geq 6$.

Έτσι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος α είναι **α = 6**.