ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004

ΘΕΜΑ1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0).$$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστηνα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 2

<u>Απάντηση:</u>

Α. Θεώρημα (Fermat) σελ. 260 σχολ. βιβλίου.

Β. Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	*	Λ	Λ	Σ

(*) Η απάντηση στο ερώτημα 1 Γ β μπορεί να χαρακτηρισθεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Όπως είναι διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$, αφού για την περίπτωση του ευθέως μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα (a, x_0) ή (x_0, β). Επομένως από <u>αυστηρή μαθηματική άποψη</u>, η απάντηση είναι Λάθος.

ΘΕΜΑ2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

<u>Απάντηση:</u>

α. Πρέπει x>0. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' αυτό με

$$f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 (\ln x)' =$$
$$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2\ln x + 1)$$

Έχουμε:

$f'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2\ln x + 1) = 0$. Οπότε:

x=0 απορρίπτεται αφού $A_f = (0, +\infty)$

ή $2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$.

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f′		-	0	+	
f		↘		↗	

T. min.

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, αφού είναι συνεχής στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$ και ισχύει ότι f ′(x) <0 στο $(0, e^{-\frac{1}{2}})$.

- Γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ και ισχύει ότι f ‘ (x) >0 στο $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e^{-\frac{1}{2}}$ το

$$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{-\frac{1}{2}})^2\cdot\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=-\frac{1}{2e}$$

β. Η f είναι και 2η φορά παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό μέ $f''(x)=(2x\cdot\ln x+x)'=2\ln x+2+1=2\ln x+3$.

Έχουμε:

$$f''(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f					

Σ.Κ

$$f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\cdot\ln(e^{-\frac{3}{2}})=-\frac{3}{2}e^{-3}=-\frac{3}{2e^3}.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$
- κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το Μ $(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2e^3})$.

γ. Είναι:

- $$\lim_{x\to o^+}f(x)=\lim_{x\to o^+}x^2\ln x=\lim_{x\to o^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{(De\,L'Hospital)}{=}$$

  $$=\lim_{x\to o^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to o^+}\left(-\frac{x^4}{2x^2}\right)=-\lim_{x\to o^+}\frac{x^2}{2}=0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\ln x\right)=+\infty.$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$, είναι

$$f\left((0,e^{-\frac{1}{2}}]\right)=[-\frac{1}{2e},0).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ είναι

$$f\left([e^{-\frac{1}{2}},+\infty)\right)=[-\frac{1}{2e},+\infty).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\big((0,+\infty)\big)=[-\frac{1}{2e},0)\cup[-\frac{1}{2e},+\infty)=[-\frac{1}{2e},+\infty)$.

Έτσι, το τοπικό ακρότατο απο το ερώτημα α, μπορεί να χαρακτηριστει και ως ολικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x}f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}g(x)dx,\ \ \alpha\in R.$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}I(\alpha)$.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο R, τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό. Άρα η g είναι και συνεχής στο R.

Έτσι η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]\subseteq R$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right)\subseteq R$ με

$g'(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)$.

Επίσης είναι $\left.\begin{array}{l} g(0)=e^{0}f(0)=0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{3}{2}\right)=0 \end{array}\right|$ άρα $g(0)=g\left(\frac{3}{2}\right)$.

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}\big(f(\xi)\big)+f'(\xi)=0.$$

Όμως $e^{\xi} \neq 0$ άρα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε

$f'(\xi) = -f(\xi)$.

β. Αφού $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} e^x\left(2x^2 - 3x\right)dx = \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'\left(2x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x(2x^2 - 3x)'\,dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x(4x - 3)dx = \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'(4x - 3)dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \left[e^x\left(4x - 3\right)\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} e^x(4x - 3)'\,dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \left[e^x\left(4x - 3\right)\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} e^x \cdot 4dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \left[e^x\left(4x - 3\right)\right]_{\alpha}^{0} + 4\left[e^x\right]_{\alpha}^{0} =$$

$$= -e^{\alpha}\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) - e^0(-3) + e^{\alpha}(4\alpha - 3) + 4e^0 - 4e^{\alpha} =$$

$$= -e^{\alpha}\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) + 3 + e^{\alpha}(4\alpha - 3) + 4 - 4e^{\alpha} = 7 + e^{\alpha}\left(4\alpha - 3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4\right) =$$

$$= 7 + e^{\alpha}\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right).$$

Άρα $I(\alpha) = 7 + e^{\alpha}\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right),\ \alpha \in R$.

γ. Είναι για $\alpha < 0$, $I(\alpha) = 7 + e^{\alpha} \cdot a^2\left[-2 + \frac{7}{a} - \frac{7}{a^2}\right]$.

Έχουμε $\lim\limits_{\alpha \to -\infty}\left(e^{\alpha} \cdot \alpha^2\right) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^{\alpha}}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \frac{2\alpha}{-e^{-\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \frac{2\alpha}{e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim\limits_{\alpha \to -\infty}\left[-2 + \frac{7}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2}\right] = -2$

Άρα $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = 7 + 0(-2) = 7$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R → R τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε x ∈ R, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x - 1) \geq 0,$$

όπου z=α+βi $\in$ C, με α, β $\in$ R*, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g '.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (2, 3) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

<u>**Απάντηση:**</u>

α. Η συνάρτηση g(x) γράφεται:

$$g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)dt - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση φ(x)= $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα, η συνάρτηση $h(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική. Έτσι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt = \phi(h(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h και φ στο R, με

$$F'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot f(x^3).$$

Ακόμα η συνάρτηση $l(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$l'(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 3x^2 \cdot |z| \cdot f(x^3) - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

β. Αφού $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και g(1)=0, η δοσμένη ανισότητα γράφεται:
$g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in R$.
Έτσι όμως η g στο x_0=1 παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται απο θ. Fermat ότι g'(1)=0.

Όμως g′(1)= $3\cdot|z|\cdot f(1)-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$ και επειδή f(1)=1 βρίσκουμε ότι

g′(1)= $3\cdot|z|-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

Αφού g′(1)=0, έπεται $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ. Επειδή είναι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, προκύπτει ότι $|z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=(z+\frac{1}{z})\cdot(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}})$

$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow 0=z^2+\bar{z}^2+1 \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z^2)=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.

δ. Είναι
$z^2=(a+\beta\cdot i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta\cdot i$ οπότε $\mathrm{Re}(z^2)=a^2-\beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$a^2-\beta^2=-\frac{1}{2}$ ή $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

Επειδή α>β προκύπτει ότι

$\alpha+\beta<0$, οπότε $\beta<-\alpha<0$.

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R άρα και στο [2,3] είναι:

f(2)=α>0 και f(3)=β<0, οπότε f(2)·f(3) <0.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [2,3], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.