ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

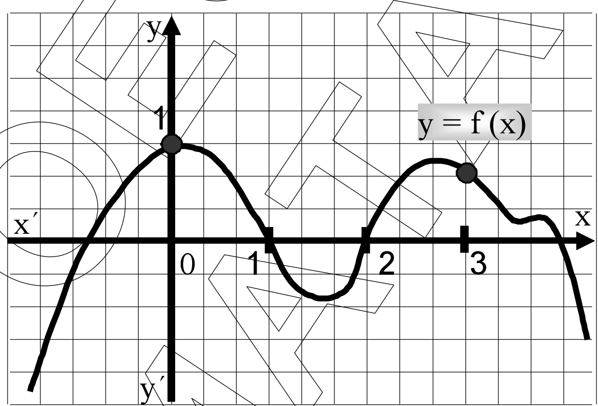
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$\mathbf{f(x_0) = \eta}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Η συνάρτηση f, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1 , I_2 , I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$I_1 = \int_0^3 f(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$I_2 = \int_0^3 f'(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$I_3 = \int_0^3 f''(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}$	**α.** $-\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x\, \eta\mu \dfrac{1}{x} \right)$	**β.** 0
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$	**γ.** 1
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x}$	**δ.** $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2^o.

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) - g'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στο όριο $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3ο

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$, $\alpha > 0$ και τον μιγαδικό $z = g(x) + xi$ με $|\bar{z} + i| \leq |z - 1|$.

Α. Να αποδείξετε, ότι i) η g αντιστρέφεται και ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1}. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β. Να αποδείξετε, ότι:

α. $Re(z) \leq Im(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. $\alpha = 1$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ. $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{\alpha + e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha + e^t} dt < \frac{1}{1+e}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4ο

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και

$$f'(x) = g^2(x) \neq 0, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1 . ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της O(0, 0). ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x$, $x = 1$, να δείξετε, ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7