ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 194: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. $I_1 > 0$ Δες σχόλιο σελίδα 346.

$I_2 = f(3) - f(0) < 0$ γιατί $f(3) < f(0)$

$I_3 = f'(3) - f'(0) < 0$ γιατί η κλίση της C_f στο $(3, f(3))$ είναι αρνητική και στο $(0, f(0))$ είναι θετική.

Γ. $1 \to \gamma$

$2 \to \beta$

$3 \to \alpha$

$4 \to \delta$

Δ. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 224 στίχοι 1 έως 8.

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)=0$ (1) και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0$ (2)

***α.* i)** Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αφού $f'(x)\neq 1$. Στο Δ είναι

$$\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'}=\frac{g'(x)}{f'(x)-1}$$

Ακόμα: $f'(x)-g'(x)=1 \Leftrightarrow g'(x)=f'(x)-1$, οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}=1$.

Από το πρώτο θεώρημα του De l' Hospital προκύπτει:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1}=1.$$

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-2$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=-2$.

Πάλι, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x+2$

β) Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $\mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)
Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2), και ακόμα
- $g(\rho_1) = g(\rho_2)=0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Τότε: $f'(\xi)-g'(\xi)=1 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$. Άτοπο, γιατί $f'(x)\neq 1$. Έτσι, η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x)-g'(x)=x \Leftrightarrow (f(x)-g(x))' = (x)'$, άρα, από τις συνέπειες του Θ. Μ. Τ. του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x)-g(x)=x+c$ (1) ή

$$f(x)-x-2 = g(x) + 2 + c-4. \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[(g(x)+2)+c-4]=0+c-4$, από την (2) είναι ίσα. Προκύπτει, επομένως : $0 = c-4$ ή $c = 4$. Άρα, είναι: $f(x)-g(x)=x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x)-g'(x) =x$]

ΘΕΜΑ 3ο

Α. **i)** Επειδή, προφανώς, η $f(t)=\frac{2}{\alpha+e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = \frac{2}{\alpha+e^t} > 0$, επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα και σαν τέτοια είναι 1−1 και αντιστρέφεται.

ii) Η C_g είναι το σύνολο των σημείων (x, g(x)) με $x\in\mathbb{R}$, άρα η C_g^{-1} είναι το σύνολο των σημείων (g(x), x) και σ' αυτήν ανήκουν οι εικόνες M(g(x), x) του z = g(x)+xi, $x\in\mathbb{R}$

Β. **α)** Έχουμε κατά σειρά

$$|\bar{z}+i| \le |z-1| \Leftrightarrow |\,g(x)-xi+i\,| \le |\,g(x)+xi-1|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+(1-x)^2} \le \sqrt{(g(x)-1)^2+x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ldots -2x \le -2g(x) \Leftrightarrow g(x) \le x$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z),\ x\in\mathbb{R}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: h(x) = g(x) − x, $x\in\mathbb{R}$.

Από το **Βα** είναι $g(x) \le x \Leftrightarrow g(x) - x \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμα, $g(0)=\int_0^0 \frac{2}{a+e^t}dx = 0 \Leftrightarrow h(0)=0$, έτσι η h έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) για x=0.

Είναι $h'(x) = g'(x)-1 = \frac{2}{\alpha+e^t} - 1,\ x\in\mathbb{R}$

Επειδή το x=0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και η h παραγωγίζεται σ' αυτό, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει : h'(0)=0 ή ισοδύναμα $\frac{2}{\alpha+e^0} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

γ. Επειδή η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2). Από το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού, υπάρχει $\xi\in(1, 2)$ με

$$\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = g'(\xi) \quad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{2}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{2}{a+e^t}dt = \frac{2}{a+e^\xi} \quad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt = \frac{1}{a+e^\xi} \quad (1)$$

Επειδή $\xi\in(1, 2)$ είναι διαδοχικά:

$$1 < \xi < 2 \quad \text{ή}$$

$$e < e^\xi < e^2 \quad [\ e^x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}\ ] \quad \text{ή}$$

$$1+e < 1+e^\xi < 1+e^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{1+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{a+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad [\ \alpha=1\ ]$$

και η (1) δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt < \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) i) Είναι $f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1), $x \in \mathbb{R}$

και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$ (2), $x \in \mathbb{R}$

οπότε:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 0$$

ή $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$

ή $2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0$

και επειδή $g(x) \neq 0$ είναι $f(x)g(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)\,g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Επειδή η g δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα:

$$g(x) > 0 \quad (3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί από την (2): $f'(x)=g^2(x) > 0$.

Από την (1): $f^2(0) + g^2(0) = 1 \Leftrightarrow f^2(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$. (4)

Έτσι,

- για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Η $g'(x)=-g(x)f(x)$, λόγω της (3), έχει για κάθε $x \neq 0$ αντίθετο πρόσημο της $f(x)$, που σημαίνει ότι

- για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Άρα, η g, ως συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) το $g(0) = 1$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

β i) Λόγω της (3) ισχύει η ισοδυναμία:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g^2(x_1) < g^2(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

που σημαίνει, τελικά, ότι η f' έχει ίδια μονοτονία με την g. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Άλλος τρόπος. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και η g^2, άρα από την (2) και η f', που σημαίνει ότι υπάρχει η f''. Τότε:

$f''(x) = (f'(x))' = (g^2(x))' = 2g(x)\,g'(x)$ έτσι, από την (3), η $f''(x)$ για κάθε $x \neq 0$ έχει ίδιο πρόσημο με την $g'(x)$:

- για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ προκύπτει, ότι είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = f'(0)\cdot x$ ή $y=x$ αφού από την (2) έπεται $f'(0)=1$.

γ. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα σημεία της εφαπτομένης της $y=x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, επομένως: $x \geq f(x) \Leftrightarrow x-f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x - f(x))\,dx \overset{(\alpha i)}{=} \int_0^1 \left(x + \frac{g'(x)}{g(x)} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|g(x)| \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \frac{0}{2} - \ln|g(0)|$$

$$= \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln[g(1)].$$ [γιατί $g(1) > 1$ από την (3)]