

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1°

**A.** Δίνονται η ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  και το διάνυσμα  $\vec{d} = (B, -A)$ .

Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{d}$ . Μονάδες 7

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος.

i) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνονται από την εξίσωση  $y = \lambda \cdot x$

ii) Το διάνυσμα  $\vec{n} = (-A, B)$  είναι κάθετο στην ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ .

iii) Αν για τους ακέραιους  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύουν:  $\gamma \mid (\alpha + \beta)$  και  $\gamma \mid \alpha$ , τότε  $\gamma \mid \beta$ .

Μονάδες 6

**Γ. α)** Δίνονται τα σημεία  $E'$  και  $E$  ενός επιπέδου.

Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες  $E'$  και  $E$ .

Μονάδες 4

**β)** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2p \cdot x$ .

Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο  $M(x_1, y_1)$ .

Μονάδες 2

**γ)** Αν  $\varepsilon$  η εκκεντρότητα της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ,

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5 \quad \text{και} \quad \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \frac{5}{8} \vec{a}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 10$ .

Μονάδες 7

**β)** Να βρείτε τη γωνία των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .

Μονάδες 6

**γ)** Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$ .

Μονάδες 6

**δ)** Αν το διάνυσμα  $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{a} - \kappa \cdot \vec{\beta}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{\beta}$ , να

βρείτε την τιμή του  $\kappa$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 2\kappa + 1$  και  $\beta = \kappa^2 + \kappa$  όπου  $\kappa$  ακέραιος.

**α)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha^2 + \beta$  είναι περιττός.

Μονάδες 9

**β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{(\alpha^2 + \beta)^2 + 31}{8}$  είναι ακέραιος.

Μονάδες 8

**γ)** Αν ο ακέραιος  $\kappa$  είναι της μορφής  $3\lambda + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  να βρείτε το υπόλοιπο της

ευκλείδειας διαίρεσης του  $\alpha + \beta$  με το 3.

Μονάδες 8

#### ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η υπερβολή  $c: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και το σημείο  $K(0, \beta)$ . Μια ευθεία ( $\varepsilon$ ) που έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda > 0$  διέρχεται από το  $K$  και τέμνει τις εφαπτόμενες της  $C$  στις κορυφές της  $A'$  και  $A$ , στα σημεία  $M$  και  $P$  αντίστοιχα.

**α)** Να γράψετε την εξίσωση της ( $\varepsilon$ ) και να αποδείξετε ότι:  $M(-a, -a\lambda + \beta)$  και  $P(a, a\lambda + \beta)$ .

Μονάδες 6

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη  $MP$  είναι η  $x^2 + (y - \beta)^2 = a^2 \cdot (1 + \lambda^2)$ .

Μονάδες 7

**γ)** Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η ακτίνα του κύκλου του ερωτήματος (β) να είναι ίση με την απόσταση των κορυφών της υπερβολής.

Μονάδες 4

**δ)** Αν  $\varepsilon$  η εκκεντρότητα της υπερβολής και ο κύκλος του ερωτήματος (β) διέρχεται από τις εστίες της, να αποδείξετε ότι:  $\lambda = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2}$ .

Μονάδες 8

