ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.

Μονάδες 8

Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

όπου f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

<u>Απάντηση:</u>

Α. Θεωρία: Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$, σελ. 28 σχολικού βιβλίου.
Β. Ορισμός: σελ. 13 σχολικού βιβλίου.
Γ. Ορισμός: σελ. 87 σχολικού βιβλίου.
Δ. **α**-Λ
β-Λ
γ-Σ
δ-Σ
ε-Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος

Μονάδες 5

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

Μονάδες 5

γ. άνδρας και φιλόλογος

Μονάδες 7

δ. άνδρας ή φιλόλογος.

Μονάδες 8

<u>Απάντηση:</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Γ: ο καθηγητής είναι γυναίκα
Φ: ο καθηγητής είναι φιλόλογος

- Επειδή το 55% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες, έχουμε ότι: $P(Γ)=0,55$.
- Επειδή το 40% των καθηγητών του λυκείου είναι φιλόλογοι, έχουμε ότι: $P(Φ)=0,40$.
- Επειδή το 30% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες φιλόλογοι, έχουμε ότι: $P(Φ \cap Γ)=P(Γ \cap Φ)=0,30$.

Επομένως:
α. $P(Γ \cup Φ)=P(Γ)+P(Φ)-P(Γ \cap Φ)=0,55+0,40-0,30=0,65$.
β. $P(Γ \cap Φ')=P(Γ)-P(Γ \cap Φ)=0,55-0,30=0,25$.
γ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος είναι το $Γ' \cap Φ$, άρα:
$P(Γ' \cap Φ)=P(Φ)-P(Γ \cap Φ)=0,40-0,30=0,10$.
δ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος είναι το $Γ' \cup Φ$, άρα:

$$\begin{aligned} P(Γ' \cup Φ) &= P(Γ')+P(Φ)-P(Γ' \cap Φ) = \\ &= 1-P(Γ)+P(Φ)-P(Φ)+P(Γ \cap Φ) = \\ &= 1-P(Γ)+P(Γ \cap Φ) = 1-0,55+0,30=0,75. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. R **β.** (-1,1) **γ. R**- {-1,1} **δ.** (1, + ∞)

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x)<0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x .

Μονάδες 7

<u>Απάντηση:</u>

Α. Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \{x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0\} \Leftrightarrow \{x \neq 1 \text{ και } x \neq -1\}$
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re-\{-1,1\}$ και η σωστή απάντηση είναι η γ.

Β. Η συνάρτηση f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$-{-1,1} με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$ για κάθε x $\in$ $\Re$-{-1,1}.

Γ. Είναι:

$$\lim_{x\to -1}[(x+1)\cdot f(x)] = \lim_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot\frac{x}{x^2-1}\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Δ. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,f(0)) με τον άξονα x΄x, τότε θα έχουμε

εφω = f΄(0)

Όμως $f'(0) = -\frac{0^2+1}{(0^2-1)^2} = -1$ και επειδή $0 \le ω < 180^o$, προκύπτει $ω = 135^o$.

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

Μονάδες 6

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

Μονάδες 5

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Μονάδες 8

δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

Μονάδες 6

<u>Απάντηση:</u>

α.

- Η μέση τιμή είναι:

  <u>Ομάδα Α</u>: $\overline{X_A} = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5$.

  <u>Ομάδα Β</u>: $\overline{X_B} = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά και έχουμε:

  <u>Ομάδα Α</u>: 1, 3, 4, 5, 8, 9. Επομένως η διάμεσος είναι: $\delta_A = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$

  <u>Ομάδα Β</u>: 4, 5, 6, 7, 12, 14. Επομένως η διάμεσος είναι: $\delta_B = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$

β. Προκειμένου να συγκρίνουμε τις ομάδες ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B. Έχουμε:

$S_A^2 = \frac{1}{6} \cdot [(1-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2] =$

$= \frac{1}{6} \cdot [(-4)^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2] =$

$= \frac{1}{6} (16 + 9 + 16 + 4 + 1) =$

$= \frac{1}{6} 46 = \frac{46}{6} = \frac{23}{3}$.

οπότε:

$S_A = \sqrt{\frac{23}{3}}$

$S_B^2 = \frac{1}{6} [(7-8)^2 + (14-8)^2 + (6-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2 + (5-8)^2] =$

$= \frac{1}{6} \cdot [(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2 + (-3)^2] =$

$= \frac{1}{6} \cdot [1 + 36 + 4 + 16 + 16 + 9] =$

$= \frac{1}{6} 82 = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$

οπότε $S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$.

Επομένως,

$CV_A = CV_A = \frac{S_A}{\overline{x_A}} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \sqrt{\frac{23}{75}} \cong \sqrt{0{,}30}$.

$CV_B = \frac{S_B}{\overline{x_B}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \sqrt{\frac{41}{192}} \cong \sqrt{0{,}21}$.

Άρα $CV_A > CV_B$ που σημαίνει ότι είναι περισσότερο ομοιογενής η Ομάδα Β.

γ.

- Αν y_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Α μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 20%, τότε έχουμε
$$y_i = x_i + \frac{20x_i}{100} = x_i\left(1+\frac{20}{100}\right) = 1{,}2x_i .$$
- Αν ω_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 5 ευρώ, τότε έχουμε
$\omega_i = x_i + 5$.

Σύμφωνα τώρα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε

$\overline{y} = 1{,}2 \cdot \overline{x_A} = 1{,}2 \cdot 5 = 6$ ευρώ και

$\overline{\omega} = \overline{x_B} + 5 = 8 + 5 = 13$ ευρώ

δ. Έχουμε

- $S_y = |1{,}2| \cdot S_A = 1{,}2 \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}$.
- $S_\omega = S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$.

Επομένως οι συντελεστές μεταβολής των νέων ομάδων είναι αντίστοιχα:

$$CV_A = \frac{S_y}{\overline{y}} = \frac{1{,}2 \cdot S_A}{1{,}2 \cdot \overline{x_A}} = CV_A \cong \sqrt{0{,}30}$$

$$CV_B = \frac{S_\omega}{\overline{\omega}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} = \sqrt{\frac{41}{507}} \cong \sqrt{0{,}08} .$$

Συνεπώς $CV_{A'} > CV_{B'}$, που σημαίνει ότι η ομάδα Β΄ είναι περισσότερο ομοιογενής από την ομάδα Α΄.