## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
## ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

**Β.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

Μονάδες 2

**β.** Έστω μία συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$.

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι κυρτή στο $\Delta$.

Μονάδες 2

**γ.** Για κάθε συνάρτηση $f$, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Μονάδες 2

**δ.** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα $\Delta$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ σε κάθε σημείο του $\Delta$ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

**ε.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του $\Delta$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και $f'(x_0)=0$, τότε η $f$ παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο $x_0$.

Μονάδες 2

**Απάντηση:**

**α.** Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου

**β.** Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου

**γ.**

- **α**-Σ
- **β**-Σ
- **γ**-Σ
- **δ**-Λ
- **ε**-Λ

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = α + βi$, όπου $α, β \in IR$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$ όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του $z$.

**α.** Να αποδείξετε ότι

$Re(w) = 3α - β + 4$

$Im(w) = 3β - α$.

Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του $w$ στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του $z$ κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

Μονάδες 9

**γ.** Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς $z$, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

**<u>Απάντηση:</u>**

**α.** Είναι:

$$w = 3z - i\bar{z} + 4 = 3(α + βi) - i(α - βi) + 4 = 3α + 3βi - αi - β + 4 = (3α - β + 4) + (3β - α)i$$

Έτσι $Re(w) = 3α - β + 4$ και $Im(w) = 3β - 4$.

**β.** Οι εικόνες του $w$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία $M(3α-β+4, 3β-α)$, όπου $α, β \in \Re$.

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$ είναι:

$3β - α = 3α - β + 4 - 12 \Leftrightarrow 4β - 4α = -8 \Leftrightarrow β - α = -2 \Leftrightarrow β = α - 2$.

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία $N(α,β)$ που είναι οι εικόνες του $z$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

**γ.** Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία (ε): $y = x - 2$, ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα $K$ είναι τέτοια ώστε $OK$ κάθετη στην (ε). Έτσι:

$$λ_{OK} = -1 \text{ και } OK\text{: } y = -x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y = x - 2,\ y = -x$$

προκύπτει $x = 1$, $y = -1$. Δηλαδή το σημείο K έχει συντεταγμένες $(1,-1)$. Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι ο $z = 1 - i$.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$ .

**α.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in IR$.

Μονάδες 6

**γ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της $f^{-1}$.

Μονάδες 5

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f^{-1}$, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

Μονάδες 8

**Απάντηση:**

**α.** Η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το $\Re$ με:

$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1$ και

$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$

- Επειδή είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ εφόσον $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'' | $-$ | 0 | $+$ |
| f | $\cap$ | | $\cup$ |

Επομένως η f είναι:

- κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
- κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη στο $\Re$.

**β.** Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \Re$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$.

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x$ στο $\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $g'(x)=e^x-1$. Από την εξίσωση $g'(x)=0$ έχουμε $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε:

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g' | - | 0 | + |
| g | γν. φθίνουσα | | γν. αύξουσα |

ελάχ. $g(0) = 0$

Επομένως $g(x) \geq g(0)=0$ για κάθε $x \in \Re$ ή $e^x-1-x \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$ και άρα:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$

**γ.** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο (0,0) έχει εξίσωση

$y-f(0) = f'(0)(x-0)$ ή $y-0 = 1(x-0)$ ή $\boxed{y=x}$

που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η f είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η $f^{-1}$ ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει $C_{f^{-1}}$ συμμετρική την $C_f$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x

**δ.** Για κάθε $x \in [0,3]$ είναι: $x \geq 0$ και επειδή η $f^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (*), θα είναι $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$. (αφού $f^{-1}(0) = 0$ **)

Έτσι το εμβαδό του ζητουμένου χωρίου ισούται με: $E = \int_0^3 f^{-1}(y)dy$.

Θέτουμε $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$. (1)

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε: $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$ και

$$y\Big|_0^3 \to x\Big|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \to x\Big|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \to x\Big|_0^1$$ (***), άρα

$$E=\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\int_0^1 x(x^5+x^3+x)'dx=\int_0^1(5x^5+3x^3+x)dx=5\int_0^1 x^5dx+3\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$$

$$=5\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1+3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=5\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{25}{12}\text{τ.μ.}$$

**Αιτιολογήσεις για το ερώτημα δ του 3ου θέματος:**

**(*) Η $f^{-1}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\Re$, σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο f(Δ) και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και αναφέρεται για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Έτσι, η μη αναφορά σε αυτήν από κάποιο μαθητή δεν έχει βαθμολογικές απώλειες).**

**(**)Ισχύει ότι: $f^{-1}(0)=0$. Πράγματι για x=0 έχουμε: $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$.**

**(***)**

- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την x=1 γιατί η f(x) είναι 1-1 στο $\Re$ και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η y=3, τέμνει την $C_f$ σε μοναδικό σημείο.**
- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=0$ έχει μοναδική λύση την x=0, γιατί $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $x^4+x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$.**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει
f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 8

**β.** Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

Μονάδες 9

**γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

**Απάντηση:**

**α.** Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα γ, δ και $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0$ που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα γ, δ ώστε $f(x_0) = 0$.

**β.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$, οπότε $\alpha < \gamma < x_0 < \delta < \beta$.

i) Στο διάστημα $[\alpha,\gamma]$ είναι:

$f(\alpha) = 0$, $f(\gamma) > 0$, άρα $f(\alpha) < f(\gamma)$ και επειδή είναι $\alpha < \gamma$ συνάγεται ότι:

$$\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma} > 0 \qquad (1)$$

Όμως από το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ) για την f στο διάστημα $[\alpha,\gamma]$, υπάρχει $\kappa_1 \in (\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(\kappa_1) = \dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}$ και λόγω της (1) $f'(\kappa_1) > 0$.

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε:

$f(\gamma) > 0$, $f(x_0) = 0$ άρα $f(\gamma) > f(x_0)$ και επειδή είναι $\gamma < x_0$ συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0} < 0 \qquad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_2 \in (\gamma,x_0)$ ώστε

$$f'(\kappa_2) = \frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0}$$

και λόγω της (2) είναι $f'(\kappa_2) < 0$.

iii) Για το διάστημα $[x_0, \delta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_3 \in (x_0,\delta)$ ώστε

$$\frac{f(\delta)-f(x_0)}{\delta-x_0} = f'(\kappa_3) < 0$$

iv) Για το διάστημα $[\delta,\beta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_4 \in (\delta,\beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta} = f'(\kappa_4) > 0$$

v) Είναι $f'(\kappa_1) > 0$, $f'(\kappa_2) < 0$ άρα $f'(\kappa_1) > f'(\kappa_2)$ και επειδή $\kappa_1 < \kappa_2$, είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1)-f'(\kappa_2)}{\kappa_1-\kappa_2} < 0$$

Όμως για την $f'$ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_1,\kappa_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa_1,\kappa_2)$ ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\kappa_1)-f'(\kappa_2)}{\kappa_1-\kappa_2} < 0$$

vi) Είναι $f'(\kappa_3) < 0$, $f'(\kappa_4) > 0$, άρα $f'(\kappa_3) < f'(\kappa_4)$ και επειδή $\kappa_3 < \kappa_4$ είναι

$$\frac{f'(\kappa_3)-f'(\kappa_4)}{\kappa_3-\kappa_4} > 0$$

Όμως για την $f'$ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_3,\kappa_4]$, οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa_3,\kappa_4)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\kappa_3)-f'(\kappa_4)}{\kappa_3-\kappa_4} > 0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

**γ.** Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την f″ στο κλειστό διάστημα με άκρα $\xi_1$, $\xi_2$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi_0$ που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα $\xi_1$, $\xi_2$ ώστε $f''(\xi_0) = 0$.

Το σημείο $\xi_0$ θα ήταν σημείο καμπής της συνάρτησης εφόσον η f″ άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

**<u>β΄ τρόπος λύσης για το θέμα 4β:</u>**

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την f που είναι συνεχής στο [α,β] εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία $x_1$, $x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Εφόσον η f παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$), η ελάχιστη τιμή $f(x_1)$ θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή $f(x_2)$ θα είναι θετική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) άρα και στα εσωτερικά σημεία $x_1$,$x_2$, που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το θ. Fermat συνάγεται ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f΄ δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η f θα ήταν σταθερή και άρα $f(x_1) = f(x_2)$ ή $f_{max} = f_{min}$ – άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα γ,δ για τα οποία ισχύει από υπόθεση $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$.

Συνεπώς υπάρχει σημείο $x_3 \in (x_1,x_2)$ ώστε $f'(x_3) > 0$ ή $f'(x_3) < 0$. Έστω πχ $f'(x_3) > 0$.

Τότε

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_1,x_3]$, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f'(x_3)}{x_3 - x_1} > 0$$

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_3, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x_3, x_2)$ ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-f'(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$$

Αν υποθέταμε $f(x_3) < 0$ θα προέκυπτε $f''(\xi_1) < 0$, $f''(\xi_2) > 0$.