

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

A. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι:

i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Μονάδες 4

B.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μονάδες 8

B.2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\emptyset)$.

Μονάδες 2

Απάντηση:

α) Ονομάζουμε απόλυτη συχνότητα, το φυσικό αριθμό v_i , ο οποίος δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων v .

β) Ονομάζουμε σχετική συχνότητα τον αριθμό f_i που προκύπτει αν διαιρέσουμε την απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i με το μέγεθος v του δείγματος.

Ισχύει δηλαδή ότι: $f_i = \frac{v_i}{v}$ με $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

γ)

i) Επειδή είναι

$$0 \leq v_i \leq v \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, \kappa$$

προκύπτει ότι

$$0 \leq \frac{v_i}{v} \leq 1.$$

Άρα $0 \leq f_i \leq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

ii) Έχουμε

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_\kappa}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa}{v} = \frac{v}{v} = 1$$

B. 1.

Κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων Θεώρημα 1. Σελ. 150 σχολ. βιβλίου.

B.2 α.

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

B.2.β.

(i) $P(\Omega) = 1.$

(ii) $P(\emptyset) = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

Μονάδες 10

Απάντηση:

(α) Πρέπει $x+1 \neq 0$, οπότε $x \neq -1$
Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

(γ) $f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1} \right)' = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} =$
 $\frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

(δ) Αναζητούμε $x_o \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ώστε $f'(x_o) = 2$

Όμως: $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

οπότε:

$$\frac{2}{(x_o+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(x_o+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$2(x_o+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_o+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_o+1-1)(x_o+1+1) = 0 \Leftrightarrow x_o(x_o+2) = 0 \Leftrightarrow (x_o = 0 \text{ ή } x_o = -2)$$

Έτσι τα σημεία επαφής είναι τα

$$A(0, f(0)) = (0, 0) \text{ και}$$

$$B(-2, f(-2)) = (-2, 4).$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις εφαπτομένων είναι :

- Στο σημείο A(0,0)

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = 2x$$

άρα

$$y = 2x$$

- Στο σημείο B(-2,4)

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

$$y - 4 = 2(x + 2)$$

$$y - 4 = 2x + 4$$

άρα

$$y = 2x + 8$$

Σημείωση:

Ως απάντηση στην εύρεση των εξισώσεων των εφαπτομένων (ερώτηση δ) θα μπορούσε να δωθεί και η ακόλουθη:

- Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο A(0,0).
Τότε: $a = f'(0) = 2$
και $0 = 2 \cdot 0 - \beta$ άρα $\beta = 0$
Οπότε $y = 2x$
- Έστω $y = a'x + \beta'$ η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο B(2,4).
Τότε: $a' = f'(-2) = 2$
και $4 = 2 \cdot (-2) + \beta'$ άρα $\beta' = 8$
Οπότε $y = 2x + 8$

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

- α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

- β.** Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

- γ.** Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

Απάντηση:

x_i	v_i	$v_i x_i$
8	1	8
9	1	9
10	1	10
13	2	26
14	2	28
15	1	15
16	1	16
18	1	18
	10	130

α)

1. Είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 v_i x_i}{10} = \frac{130}{10} = 13$

2. Για τη διάμεσο θέτοντας τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά έχουμε:
8 9 10 13 13 14 14 15 16 18

Είναι: $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5$

3. Έχουμε δύο επικρατούσες τιμές = 13, 14.

β) Το εύρος $R = 18 - 8 = 10$.

Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{1}{10} [(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + 2(13-13)^2 + 2(14-13)^2 + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2] =$$
$$= \frac{1}{10} [25 + 16 + 9 + 2 + 4 + 9 + 25] = \frac{90}{10} = 9$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = 3$

και $CV_1 = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{13}$

Περίπου 23%.

γ). Έστω y_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ οι τιμές που προκύπτουν μετά την έκπτωση κατά 10% ή ισοδύναμα με πολλαπλασιασμό κατά 0,9. Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y} = 0,9\bar{x}$, ενώ η νέα τυπική απόκλιση είναι $s_y = 0,9 \cdot s_x$

Έτσι ο νέος συντελεστής μεταβολής που προκύπτει είναι

$$CV_2 = \frac{0,9 \cdot s_x}{0,9 \cdot \bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_1$$

Επομένως δεν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$.

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Από την υπόθεση έχουμε: $P(A)+P(B) \neq 2P(A \cap B)$
 δηλ. $P(A)+P(B) - P(A \cap B) \neq P(A \cap B)$
 $\Leftrightarrow P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$

β) Είναι: $f'(x) = 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 \quad x \in \mathbb{R}$
 Ακόμη: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - P(A \cup B) = x - P(A \cap B) \\ \text{ή} \\ x - P(A \cup B) = -x + P(A \cap B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P(A \cap B) \quad \text{αδύνατο} \\ \text{ή} \\ 2x = P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Επίσης: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B))(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B)) > 0$
 $\Leftrightarrow (P(A \cap B) - P(A \cup B))[2x - (P(A \cup B) + P(A \cap B))] > 0$
 $\Leftrightarrow (P(A \cap B) - P(A \cup B))[2x - (P(A) + P(B))] > 0 \quad (1)$

Όμως: $A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$
 και επειδή: $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$
 είναι: $P(A \cap B) < P(A \cup B)$
 Έτσι: $P(A \cap B) - P(A \cup B) < 0$
 Οπότε: $(1) \Leftrightarrow 2x < P(A) + P(B)$
 $\Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2}$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{P(A) + P(B)}{2}$

Άρα η f παρουσιάζει \max για $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$

γ) Αφού $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ (1)

και $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (2)

Έτσι: $f(P(A)) = [P(A) - P(A \cup B)]^3 - [P(A) - P(A \cap B)]^3$

$\stackrel{(1),(2)}{=} [P(A) - P(A) - P(B)]^3 - [P(A)]^3$

$= -P^3(B) - P^3(A)$

$f(P(B)) = [P(B) - P(A \cup B)]^3 - [P(B) - P(A \cap B)]^3$

$\stackrel{(1),(2)}{=} [P(B) - P(A) - P(B)]^3 - P^3(B)$

$= -P^3(A) - P^3(B)$

Άρα: $f(P(A)) = f(P(B))$.