

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6,5

A.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \dots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

Μονάδες 6

B.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0,3)$ έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

B.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 (e^x + x) dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z + 16| = 4|z + 1|$$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 1| = |z - i|$$

Μονάδες 9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 11

γ. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt \quad \text{με } x > 0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

Μονάδες 5