ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. **α) Λάθος** διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ άρα $f(x)>0$ κοντά στο x_0

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}>0 \text{ διότι } f\uparrow \text{ άρα } f(a)<f(\beta)$$

δ) Λάθος διότι $f''(x)\geq 0, x\in\Delta$. (Παράδειγμα: για την $f(x)=x^4$ είναι:

$$f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2\geq 0 \text{ για κάθε } x\in R)$$

ε) Σωστό διότι αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx=0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε $\int_a^\beta f(x)dx>0$ άτοπο.

Θέμα 2ο

Α. $A=(0,+\infty)$ πεδίο ορισμού

$$f'(x)=\frac{(\ln(ax))'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{ax}\cdot(ax)'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln(ax)}{2x\sqrt{x}}\quad(1)$$

Είναι $f'(1)=\dfrac{2-\ln a}{2}=1\Leftrightarrow 2-\ln a=2\Leftrightarrow \ln a=0\Leftrightarrow a=1$

Β. α) Για α=1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0 \ \text{ και } \ f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},\ x>0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		-
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f(e^2)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}(\max)$$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Άρα $f\left(\left(0,e^2\right]\right)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$ και $f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left[\frac{2}{e},0\right)$

Η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\ln\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\sqrt{\kappa}>\sqrt{\kappa}\cdot\ln\sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\kappa>\sqrt{\kappa}\cdot\ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$

$\frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}>\frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow$

$f(\kappa)>f(\kappa+1)$ ισχύει διότι

$\kappa+1>\kappa\geq 8>e^2$ και $f\downarrow$ στο $\left[e^2,+\infty\right)$

Θέμα 3ο

Α. α) $z_1 = \dfrac{1+\beta - i(a-\beta i)}{1+f(\beta) - i\left[f(a) - i\cdot f(\beta)\right]} = \dfrac{1-i\cdot a}{1-i\cdot f(a)} =$

$$= \frac{(1-i\cdot a)(1+i\cdot f(a))}{\left[1-i\cdot f(a)\right]\cdot\left[1+i\cdot f(a)\right]} = \frac{(1+a\cdot f(a)) + i(-a+f(a))}{1+f^2(a)}$$

$z_1 \in R$ αν και μόνο αν $-a+f(a)=0 \Leftrightarrow f(a)=a$

β) Ισχύει $z=-iw \Leftrightarrow a+\beta i = -i(f(a)+i\cdot f(\beta)) \Leftrightarrow a+\beta i = f(\beta) - if(a)$ οπότε $f(a)=-\beta$ και $f(\beta)=a$. Άρα $w=-\beta+\alpha\cdot i$. Έστω $A(a,\beta)$ και $B(-\beta,a)$. Είναι $(OA)=\sqrt{a^2+\beta^2}, (OB)=\sqrt{a^2+\beta^2}$ δηλαδή $O\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές.

Επειδή $(AB)^2 = (a+\beta)^2 + (a-\beta)^2 =$

$$= a^2+\beta^2+2a\beta+a^2+\beta^2-2a\beta = 2(a^2+\beta^2) = (OA)^2+(OB)^2$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

Β. α) Έχουμε $\left|a+\beta i - i(f(a)+if(\beta))\right|^2 = |a+\beta i|^2 + |if(a)-f(\beta)|^2$

$$\left|a+f(\beta)+i(\beta-f(a))\right|^2 = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$(a+f(\beta))^2 + (\beta-f(a))^2 = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$a^2+f^2(\beta)+2a\cdot f(\beta)+\beta^2+f^2(a)-2\beta\cdot f(a) = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$2a\cdot f(\beta)-2\beta\cdot f(a)=0 \Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0$$

β) Έστω $A(a,\beta)$ και $B(f(a), f(\beta))$

$\lambda_{OA}=\dfrac{\beta}{a}$ και $\lambda_{OB}=\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ οι συντελεστές διεύθυνσης ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ που σημαίνει Α, Ο, Β συνευθειακά.

(Είναι $f(a)\neq 0$ διότι αν $f(a)=0$ τότε και $f(\beta)=0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0,0)$ όταν $-f(x_0)=-x_0\cdot f'(x_0) \Leftrightarrow x_0\cdot f'(x_0)-f(x_0)=0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση

$$x\cdot f'(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0.$$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in[a,\beta]$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και
- $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{a}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση $g'(x)=0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x\cdot f'(x)-f(x)=0$

Θέμα 4ο

α) $\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)\,dt-4x\cdot f(x)\cdot\int_0^1 tdt$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-4x\cdot f(x)\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-\frac{4}{2}x\cdot f(x)\quad (1)$$

Με παραγώγιση των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2+1)f''(x)=-2x\cdot f'(x)-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$(x^2+1)f''(x)+2x\cdot f'(x)=-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=\left[-2x\cdot f'(x)\right]',\text{ άρα } (x^2+1)f'(x)=-2x\cdot f(x)+C_1\quad (2)$$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=C_1$ άρα $C_1=2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=(2x)'\ \text{ Άρα }\ (x^2+1)\cdot f(x)=2x+C_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=C_2$ άρα $C_2=0$. Επομένως $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},x\in R$

<u>β΄ μέθοδος</u>

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[(t^2+1)f'(t)\right]_0^x-\int_0^x 2tf'(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\int_0^1 tdt\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-f'(0)=-4x\cdot f(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-2=-2x\cdot f(x)\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2\Leftrightarrow$$

$\left[\left(x^2+1\right)f(x)\right]' = (2x)'$

Άρα $\left(x^2+1\right)f(x) = 2x + c$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c$ δηλαδή $c = 0$ οπότε $\left(x^2+1\right)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

β) $\mathrm{E}(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^a \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a = \ln\left(a^2+1\right)$.

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'(a) = \left[\ln\left(a^2(t)+1\right)\right]' = \frac{1}{a^2(t)+1}\left(a^2(t)+1\right)' = \frac{2a(t)\cdot a'(t)}{a^2(t)+1}.$$

Είναι $a'(t) = \dfrac{10}{3} cm/\sec$ και $a(t) = 3cm$, άρα $E'(1) = \dfrac{2\cdot 3\cdot \frac{10}{3}}{9+1} cm^2/\sec = 2cm^2/\sec$.

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(a)$ όταν $a = 3cm$.

γ) i) Αφού $x \to +\infty$ για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$-\left|f(x)\right| \le g(x) + x - 2 \le \left|f(x)\right|$$

$$-\frac{2x}{x^2+1} \le g(x) - (-x+2) \le \frac{2x}{x^2+1}$$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}$.

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[g(x) - (-x+2)\right] = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = -x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii) Είναι $E = \displaystyle\int_0^2 \left|g(x) - (-x+2)\right|dx = \int_0^2 \left|g(x) + x - 2\right|dx$ και

$\left|g(x) + x - 2\right| \le \left|f(x)\right|$ (ερώτημα i)

$\left|g(x) + x - 2\right| - \left|f(x)\right| \le 0$. Άρα

$$\int_0^2 \left[\left|g(x) + x - 2\right| - \left|f(x)\right|\right]dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \left|g(x) + x - 2\right|dx - \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \ln 5 \le 0 \Leftrightarrow E \le \ln 5$$