

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A. α)** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει:  $f'(x) = \cos x$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**β)** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς σε ένα διάστημα  $\Delta$  για τις οποίες ισχύει:  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια ώστε να ισχύει:  $f(x) = g(x) + c$  για κάθε  $x \in \Delta$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Να δώσετε τον ορισμό: Πότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

**α)** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $A$ .

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και  $f(x_0) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για τις τιμές του  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$  τότε, υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $f'(x_0) > 0$ .

**δ)** Έστω η συνάρτηση  $f$  η οποία είναι κυρτή στο διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**ε)** Αν  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq 0$  και ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) > 0$ .

**στ)** Αν η συνεχής συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε η  $f$  παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

**Θέμα 2ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$ ,  $a > 0$ .

**A.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $x - y = 0$ , να βρείτε την τιμή του  $a$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**B.** Για  $a = 1$ :

**α)** Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

**γ)** Να αποδείξετε: ότι  $(\sqrt{k})^{\sqrt{k+1}} > (\sqrt{k+1})^{\sqrt{k}}$  για κάθε θετικό ακέραιο  $k \geq 8$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8****Θέμα 3ο**

Δίνονται συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  με  $0 < \alpha < \beta$  και οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = a + \beta i$  και  $w = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$  με  $f(\beta) \neq 0$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** Ο αριθμός  $z_1 = \frac{1 + \beta - i \cdot z}{1 + f(\beta) - i \cdot w}$  είναι πραγματικός αν και μόνο αν  $f(\alpha) = a$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**β)** Αν  $z = -iw$  τότε οι εικόνες των  $z, w$  στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**B.** Έστω ότι ισχύει  $|z - iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha) \neq 0$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**β)** Οι εικόνες των  $z, w$  και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**γ)** Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  να διέρχεται από το σημείο  $O(0,0)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**Θέμα 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f''(x)$  συνεχή στο  $\mathbf{R}$  τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x (t^2 + 1) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - 4 \int_0^1 x \cdot t \cdot f(x) dt \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \text{ με}$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R}$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

β) Έστω  $E(a)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=0$  και  $x=a > 0$ .

Αν το  $a$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $\frac{10}{3} \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(a)$ , τη χρονική στιγμή κατά την οποία  $a = 3 \text{ cm}$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = -x + 2$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $g$  όταν  $x \rightarrow +\infty$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

(ii) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , την πλαγία ασύμπτωτη της στο  $+\infty$  και τις ευθείες  $x=0$  και  $x=2$ , να αποδείξετε ότι:  $E \leq \ln 5$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ