

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 5)

B. Δίνεται η ευθεία  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$  της παλινρόμησης της μεταβλητής  $Y$  πάνω στη  $X$ .

α. Να δώσετε, με απόδειξη, την ερμηνεία της εκτιμήτριας  $\hat{\beta}$ .

(μονάδες 5)

β. Να εξηγήσετε γιατί διέρχεται από το σημείο  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

(μονάδες 2)

Γ. Να δώσετε τους ορισμούς των εννοιών που αναφέρονται στις προτάσεις (α) έως (δ).

α. Τι λέμε καμπύλη συχνοτήτων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής;

β. Πώς ορίζεται η παράγωγος  $f'(x_0)$  της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ ;

γ. Τι είναι το εύρος ενός δείγματος;

δ. Τι ονομάζεται στατική ομαλότητα;

(μονάδες 8)

Δ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ τότε ο τύπος της } f \text{ είναι:}$$

A)  $2\ln x + \frac{1}{\eta\mu^3 x} + \frac{\sqrt{x}}{2},$

B)  $\frac{2}{x} + \epsilon\phi x + \sqrt{x},$

Γ)  $2\ln x + \epsilon\phi x + \sqrt{x},$

Δ)  $(\ln x)^2 + (\epsilon\phi x)^2 + \sqrt{x},$

Ε) Τίποτα από τα A, B, Γ, Δ

(μονάδες 2,5)

β. Αν για την πιθανότητα  $P(A)$  του ενδεχομένου  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $[P(A)]^2 - 2P(A) + 1 = 0$  (1), τότε:

A) το  $A$  είναι το αδύνατο ενδεχόμενο

B) το  $A$  είναι βέβαιο ενδεχόμενο

Γ) ισχύει  $0 < P(A) < \frac{1}{2}$

Δ) η σχέση (1) είναι αδύνατη

Ε) τίποτα από τα A, B, Γ, Δ

(μονάδες 2,5)

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi, f, g$  με  $f(1)=f'(1)=1$  και  $\varphi(x)=f(g(x)), g(x)=\ln x+x$ , με  $x>0$ .

A. Να αποδείξετε ότι:  $g(1)=\varphi(1)=1$  και  $g'(1)=\varphi'(1)=2$ .  
(μονάδες 7)

B. Να εξετάσετε αν η  $g(x)$  έχει ακρότατα στο διάστημα  $\Delta=(0,+\infty)$   
(μονάδες 5)

Γ. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1) + (h+1) - g(1)}{h}$ .  
(μονάδες 4)

Δ. α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  των γραφικών παραστάσεων των  $\varphi$  και  $f$  στα σημεία τους  $A(1,\varphi(1))$  και  $B(1,f(1))$  αντίστοιχα.  
(μονάδες 7)

β. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η  $\varepsilon_2$  με τον άξονα των  $x$ .  
(μονάδες 2)

## ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

$n$  τηλεθεατές δήλωσαν την προτίμησή τους σε ένα μόνο από  $\kappa$  προγράμματα τα  $a_1, a_2, \dots, a_\kappa$  με  $n, \kappa \in \mathbb{N}^*$ . Από τις μετρήσεις προέκυψε ότι για τα ποσοστά προτίμησης  $f(a_i)$  των  $a_i$  είναι:  $f(a_3) = \frac{400}{31} \%$  και  $f(a_i) = \lambda \cdot 2^{i-1}$  με  $i=1,2,\dots,\kappa$  και  $\lambda$  σταθερό αριθμό.

A. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = \frac{1}{31}$  και  $\kappa=5$ .  
(μονάδες 4)

B. Επιλέγουμε ένα τηλεθεατή στην τύχη. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεκωμένων:

A: Να προτίμησε το πρόγραμμα  $a_4$ .

B: Να προτιμήσε ένα από τα 2 πιο δημοφιλή προγράμματα.

Γ: Να μην προτίμησε το  $a_1$ .

(μονάδες 6)

Γ. Αν το  $a_4$  προτιμήθηκε από 160 άτομα, να βρείτε το  $n$ .  
(μονάδες 5)

Δ. α. Να γίνει το ραβδόγραμμα συχνοτήτων της μεταβλητής  $X$ : « ο αριθμός των προτιμήσεων» που έλαβε κάθε πρόγραμμα.  
(μονάδες 7)

β. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή της μεταβλητής  $X$ .  
(μονάδες 3)

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής  $X$  των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες €) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

A(20,0), B(40,5), Γ(60,10), Δ(80,20), E(100,30), Z(120, $v_5$ ), Η(140,10), Θ(160,0).

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση  $x=100$  διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

- A. Να αποδείξετε ότι  $v_5=25$ . (μονάδες 5)
- B. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής  $X$ . (μονάδες 5)
- Γ. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της  $X$ . (μονάδες 7)
- Δ. Αν σαν «όριο φτώχειας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7200 €, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις % των φτωχών του δείγματος. (μονάδες 5)
- E. Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την συμμετρία της. (μονάδες 3)