ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[α,β]$ με $f(α)\neq f(β)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον αριθμός $x_o \in (α,β)$, ώστε $f(x_o)=η$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Β) Έστω οι αριθμοί $α,β,λ \in R$ με $α<β$ και η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[α,β]$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.

β. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [α,β]$ με $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, για κάθε $x \in [α,β]$.

γ. Αν $f(α)f(β)>0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο $(α,β)$.

δ. Ισχύει: $\left(\int_α^β f(x)dx\right)' = f'(x)$.

ε. $\int λf(x)dx = λ\int f(x)dx$, για κάθε $λ \in R$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Γ) Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2 \neq 0$ και έστω Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $|z-z_1| = |z-z_2|$, παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

β. Αν $z_2=iz_1$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Ο είναι η αρχή των αξόνων)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

Δ) Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R \to R$, για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ για κάθε $x \in R$ με $f'(0)=1$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f:

α. είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

β. στρέφει τα κοίλα κάτω στο R

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

γ. έχει μοναδική ρίζα την x=0.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

Β) Να αποδείξετε ότι:

α. ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, για κάθε $x \in R$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

β. η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

γ. οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Γ) α. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq -2i$ και θεωρούμε τον $f(z)=\dfrac{2z}{z+2i}$. Έστω ρ το μέτρο και θ ένα όρισμα του μιγαδικού z+2i.

α. Βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας Α του μιγαδικού z_o στο μιγαδικό επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $f(z_o)=3+i$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

β. Να βρείτε συναρτήσει των ρ και θ, το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού f(z)-2.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

γ. Αν $|f(z)-2| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

δ. Αν $Arg(f(z)-2)=\dfrac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε μία ημιευθεία ε.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

ε. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο c και στην ημιευθεία ε.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται η συνάρτηση f: $R \to R$ με $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι συναρτήσεις F, G με

$F(x)=\int_{1/e}^{x} f(t)dt$, $G(x)=\int_{1/e}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt$, x>0.

Να αποδείξετε ότι:

Α) α. $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ για κάθε $x \in R^*$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

β. $-\frac{1}{8} \le f'(x) \le 1$, για κάθε $x \in R$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β με 0<α<β ισχύει: $f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le \beta-\alpha$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με g(x)=F(x)+G(x), x>0 είναι g(x)=lnx+1, x>0.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Δ) Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία 0, $\frac{\pi}{2}$ και h(x)=F(εφx)+G(σφx) με $0<x<\frac{\pi}{2}$, τότε είναι σταθερή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και να βρεθεί η τιμή της.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f΄(x), h(x) και την ευθεία x=1 είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)