

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία. (ΘΕΤ)

β) Σ-Σ-Λ-Λ-Λ.

γ) ι) Θεωρία Σελίδα 99.

ιι) Η διανυσματική ακτίνα του z_2 προκύπτει με στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά 90°

δ) Θεωρία Σελίδα 217

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{ii) } f^{-1}(x) = \left(\frac{2}{1+e^{f(x)}} \right)^{-1} = \frac{-2f'(x)e^{f(x)}}{(1+e^{f(x)})^2} < 0 \quad \kappa \lambda \pi$$

iii) αφού $f'(0)=1$ η ισότητα $f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}}$ για $x=0$ δίνει $f(0)=0$ Η f ως είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

$$\text{β) i) } f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)[1+e^{f(x)}] = 2 \Leftrightarrow \left(1+e^{f(x)}\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) + e^{f(x)} = 2x + c. \text{ Αλλά } f(0)=0 \Leftrightarrow c=1, \text{ άρα } f(x) + e^{f(x)} = 2x+1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ii) } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + e^x - 1) \quad \text{iii) Βρίσκουμε την } y=x$$

$$\gamma) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1-e^{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{e^{f(x)}}{x}\right) = 2 + 0 - 0 = 2 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1-e^{f(x)} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{f(x)}) = 1 - 0 = 1$$

Άρα $y=2x+1$

ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1-e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{e^{1/x}}{x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{f'(x)}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{1+e^{1/x}}\right) = 2+0-0 = 2 = \lambda'\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \lambda'x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1-e^{1/x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1-e^{1/x}) = -\infty \text{ κ.λ.π}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Είναι $z+2i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho > 0$.

i) $f(z_0) = \frac{2z_0}{z_0+2i} = 3+i \Leftrightarrow \dots z_0 = -2-4i$. Άρα $A(-2, -4)$

ii) $f(z) - 2 = \frac{2z}{z+2i} - 2 = \frac{-4i}{z+2i} = \frac{4[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)]}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$
 $= \frac{4}{\rho} [\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + i\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)]$

iii) $|f(z) - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\rho} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$ δηλαδή $|z+2i| = 2\sqrt{2}$ που σημαίνει ότι η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c , του οποίου το κέντρο είναι $K(0, -2)$ και η ακτίνα $2\sqrt{2}$.

iv) $\text{Arg}(f(z) - 2) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$ Τότε,

$$\text{Arg}(z+2i) = \text{Arg}(x+i(y+2)) = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{y+2}{x} = \tan \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow y = x - 2 \text{ με } x < 0$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \dots x^2 + x^4 \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \dots (x^2 - 3)^2 \geq 0$$

β) Θεώρημα μέσης τιμής στο $[a, \beta]$ ή στο $[\eta\mu\alpha, \alpha]$ (είναι $\eta\mu\alpha < \alpha$ για $\alpha > 0$):

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\xi) \leq \beta - \alpha$$

γ) Είναι

$$\begin{aligned}g(x) &= F(x) + G(x) = \int_{1/x}^x f(t) dt + \int_{1/x}^x \frac{f(t)}{t^2} dt \\ &= \int_{1/x}^x \left(f(t) + \frac{f(t)}{t^2} \right) dt = \int_{1/x}^x \left(\frac{1}{t} \right) dt = \ln x + 1\end{aligned}$$

δ) Έχουμε:

$$\begin{aligned}h'(x) &= [F(\varepsilon\varphi(x)) + G(\sigma\varphi(x))] = F'(\varepsilon\varphi(x)) \cdot (\varepsilon\varphi(x))' + G'(\sigma\varphi(x)) \cdot (\sigma\varphi(x))' \\ &= \frac{\varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} (1 + \varepsilon\varphi^2 x) + \frac{1}{\sigma\varphi x (1 + \sigma\varphi^2 x)} [-(1 + \sigma\varphi^2 x)] \\ &= \varepsilon\varphi x - \frac{1}{\sigma\varphi x} = 0\end{aligned}$$

για $x = \pi/4$: $h(\pi/4) = F(1) + G(1) = g(1) = \ln 1 + 1 = 1$, άρα κ.λ.π. $h(x) = 1$ στο Δ .

δ) παραλλαγή 3 i), ii)

$$\begin{aligned}E = F(c) &= \int_1^c f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_1^c = \ln \sqrt{\frac{1+c^2}{2}} \\ \int_1^c \frac{1}{t(1+t^2)} dt &= G(c) \stackrel{64}{=} \ln c - F(c) = 1 - \ln \sqrt{\frac{1+c^2}{2}}\end{aligned}$$

ε) Είναι

$$E = \int_0^1 (t - f^2(x)) dx = [x - f(x)]_0^1 = \left[x - \frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$