ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Θεωρία.

Β) α) i) $g'(x)=0$ ii) $g'(x)=2001$ κλπ.

β) i) Λάθος.

ii) $1<2 \Rightarrow f(1)<f(2)$. Λάθος.

iii) Από τα σχόλια του Θεωρήματος Bolzano, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α) $$f(2)=\frac{2+i\bar{2}}{1-\bar{2}}=\frac{2+2i}{-1}=-2-2i$$

οπότε $|f(2)|=\ldots=2\sqrt{2}$ και $\arg[f(2)]=\ldots=5\pi/4$

β) Είναι $f(2)=2\sqrt{2}[\sigma\upsilon\nu(5\pi/4)+i\eta\mu(5\pi/4)]$ και

$$w=[f(2)]^{2004}=\{2\sqrt{2}[\sigma\upsilon\nu(5\pi/4)+i\eta\mu(5\pi/4)]\}^{2004}$$
$$=(2\sqrt{2})^{2004}[\sigma\upsilon\nu(2005\pi)+i\eta\mu(2005)]$$
$$=-(2\sqrt{2})^{2004}$$ πραγματικός.

γ) Με αντικατάσταση του f(z) στο 1^o μέλος μετά τις πράξεις προκύπτει το 2^oμέλος.

δ) Αν M(x,y) τότε f(z)=x+iy οπότε με $|z|=1$ από γ) ερώτημα είναι διαδοχικά:

$$\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=1$$

ή $$|f(z)-2|=|f(z)+i| \quad (^*)$$

---

* 2η λύση. Από εδώ προκύπτει ότι το Μ είναι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος με άκρα τα A(2,0) και B(0,-1) στα οποία απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_1=2+0i$ $z_2=0-i$.
Η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα βρεθεί με γνώσεις Β' Λυκείου.

ή $\quad |2x+iy-2| = |x+iy+i|$

ή $\quad |(x-2)+iy| = |x+i(y+1)|$

ή $\quad \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$

ή $\quad -4x-2y+3=0$

ΘΕΜΑ 3^o α)

- Έχουμε $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta} = 2$

  Με α= 1 είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x} = 0$ άτοπο.

  Με $\alpha \neq 1$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha-1)x}{x} = \alpha-1.$

Άρα $\alpha-1=2$ και η f γίνεται

$$f(x) = \frac{2x+6}{x+\beta} \qquad (1)$$

- Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, οπότε, υπάρχει περιοχή της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ στην οποία $f(x) \neq 0$ και έτσι, στην περιοχή αυτή από την (1) βρίσκουμε:

$$x+\beta = \frac{2x+6}{f(x)}$$

και αφού $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x+6}{f(x)}=0$ (μορφή $\dfrac{4}{+\infty}$ ή $\dfrac{4}{-\infty}$)

είναι και $\lim\limits_{x\to-1^+} (x+\beta)=0$ ή $\beta=-1.$

Έτσι η f γίνεται $\quad f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}, \quad x > -1.$

2^{ος} τρόπος εύρεσης του β.

Αν $\beta \neq -1$ είναι $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x+6}{x+\beta} = \dfrac{4}{-1+\beta}$ άτοπο.

Αν $\beta = -1$ είναι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+6}{x-1} = +\infty$. Άρα $\beta = -1$

β) Είναι $\quad G(x) = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{2x+6}{x+1}dx = \int (2 + \frac{4}{x+1})dx$

ή $\quad G(x) = 2x + 4\ln|x+1| + c$

ή $\quad G(x) = 2x + 4\ln(x+1) + c$

Με $G(0) = 2$ προκύπτει $c = 2$, άρα

$$G(x) = 2x + 2 + 4\ln(x+1), \quad x > -1.$$

γ) Είναι $\quad h(x) = \dfrac{2x+2+4\ln(x+1)}{x+1} = 2 + 4\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}, \quad x>-1$

και $\quad h'(x) = \ldots = 4\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}, \quad x > -1$

τότε $\quad h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq e-1$

$\quad h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e-1$

Το πρόσημο της h', η μονοτονία της h και το μέγιστό της φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	-1		$e-1$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$2+\frac{4}{e}$	$\searrow$	

κλπ.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{O}}$

Η δοσμένη ισότητα γράφεται

$$\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$$

οπότε παραγωγίζοντας δύο φορές έχουμε:

$$f(x) - g(x) = 2x - 2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$f'(x) - g'(x) = 2 \qquad \textbf{(2)}$$

Ακόμα: $\quad f(\varrho_1) = f(\varrho_2) = 0 \qquad$ **(3)**

α) i) Η (1) δίνει $\quad g(x) = f(x) - 2(x-1)$

Οπότε $\quad g(\varrho_1) = -2(\varrho_1 - 1)$

$$g(\rho_2) = -2(\rho_2 - 1)$$

Άρα $$g(\rho_1)g(\rho_2) = 4(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1)$$

και αφού $\rho_1 < 1 < \rho_2$ είναι $4(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) < 0$ κλπ Bolzano.

ii) Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ με τις σχέσεις (2)-(3). (είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ - παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2)$). Έτσι, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 2 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -2$$

($2^η$ λύση γίνεται με ΘΜΤ για την g, $3^η$ με την $h(x) = g(x) + 2x$, $4^η$ με την $\varphi(x) = g'(\xi) + 2$)

β) i) Η g' είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g'(x_1) < g'(x_2) \Leftrightarrow g'(x_1) - 2 < g'(x_2) - 2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

έτσι η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα η f είναι κυρτή.

ii) Αφού $g'(\xi) = -2$ είναι $f'(\xi) = 0$ και η f' ως γνησίως αύξουσα αλλάζει πρόσημο στο ξ, όπως φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ξ	$+$

Άρα στο $x_0 = \xi$ η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, το οποίο είναι μοναδικό.

γ) Οι C_f, C_y τέμνονται όταν

$$\{\, y = f(x) \quad \text{και} \quad y = g(x) \,\}$$

οπότε $$f(x) = g(x)$$

ή $$f(x) - g(x) = 0$$

ή από την (1): $2x - 2 = 0$, άρα: $x = 1$

Συνεπώς ζητάμε το

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 |2x - 2|\, dx = \int_0^1 (2 - 2x)\, dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 1 \text{ τ.μ.}$$