ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
(ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ-ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία, σελίδα 32

Β. Θεωρία, σελίδα 147 ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (iv)

Γ. Σ – Λ – Σ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Επαγωγή. Για $\nu = 2$ η σχέση προφανώς ισχύει.

Αν $2^\nu > 3\nu - 5$ (2), με $\nu \geq 2$, θα δείξουμε ότι

$2^{\nu+1} > 3(\nu+1) - 5 \Leftrightarrow 2^{\nu+1} > 3\nu - 2$ (3)

Η (3) ισχύει για $\nu = 2$.

Για $\nu \geq 3$ είναι

$$2^{\nu+1} = 2 \cdot 2^\nu \overset{(2)}{>} 2 \cdot (3\nu - 5) = 6\nu - 10,$$

επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$6\nu - 10 > 3\nu - 2 \Leftrightarrow \nu > 8/3$, που ισχύει.

Β. Για $\nu = 1$ η (1) γίνεται $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ και παριστάνει ισοσκελή υπερβολή με $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2$. Οι εστίες είναι $E'(-2, 0)$, $E(2, 0)$, η εκκεντρότητα ισούται με $\sqrt{2}$ και οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y = \pm x$.

Γ. Είναι $\nu \geq 2$. Η (1) γράφεται

$$\frac{x^2}{2^\nu} + \frac{y^2}{3\nu - 5} = 1$$

και επειδή $3\nu - 5 > 0$ και $2^\nu > 3\nu - 5$ παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα των x.

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

(i) Είναι (ΜΑ) < 2 $\Leftrightarrow \ldots\ \alpha^2 + (\beta - 1)^2 < 4$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ii) Η απόσταση του Κ από την $x = 2$ ισούται με την ακτίνα $\rho = 2$, έτσι η $x = 2$ εφάπτεται στον κύκλο.

Β.

(i) Η (1) γράφεται: $(\lambda^2 - 1)\, x + 2\lambda\, y - 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ (2) με $\lambda \in \mathbb{R}$.. και παριστάνει ευθεία γιατί οι συντελεστές της $A = \lambda^2 - 1$, $B = 2\lambda$ δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.

(ii) Το Ν δεν ανήκει σε ευθεία με εξίσωση της μορφής (1), αν και μόνον αν, η εξίσωση

$$\lambda^2(x_0 - 2) + 2\lambda\,(y_0 - 1) - x_0 - 2 = 0 \qquad (3)$$

είναι αδύνατη, ως προς λ. Επειδή $x_0 \neq 2$ η (3) είναι δευτέρου βαθμού, επομένως πρέπει και αρκεί να έχει αρνητική διακρίνουσα: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \ldots\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 < 4$

Άρα, ο ζητούμενος γ. τ. είναι το εσωτερικό του κύκλου C.

ΘΕΜΑ 4ο

Είναι $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}| = 1$

(i) Με σημείο αναφοράς το Ο η ισότητα $2\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma}$ δίνει διαδοχικά

$2\overrightarrow{OA} = 4(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \ldots\ 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma}$

(ii) Υψώνουμε στο τετράγωνο την $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma}$ και μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

(iii) $\text{συν}\,(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}}) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O\Gamma}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{O\Gamma}|} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} \cdot \dfrac{3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}}{5} = \ldots = \dfrac{3}{5}$

(iv) Για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχουμε τις σχέσεις

$E = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right|$ και $E = \dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}| = \dfrac{1}{2}$,

οπότε $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm 1$.