ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$ **(μονάδες 5)**

Β. Έστω α, β, γ ακέραιοι με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$ **(μονάδες 5)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, είναι: $y - y_0 = \lambda\,(x - x_0)$. **(μονάδες 3)**
2. Η ισότητα $-23 = 6\cdot(-3) - 5$ εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης $(-23) : 6$ **(μονάδες 3)**
3. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ **(μονάδες 3)**
4. Η εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 2px$ $(p \neq 0)$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $yy_1 = 2\,p(x + x_1)$. **(μονάδες 3)**
5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι παράλληλα, τότε
$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$ **(μονάδες 3)**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ν θετικός ακέραιος.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \geq 2$ είναι $2^{\nu} > 3\nu - 5$. **(μονάδες 10)**

Β. Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{x^2}{2^{\nu}} - \frac{y^2}{5 - 3\nu} = 1 \qquad (1)$$

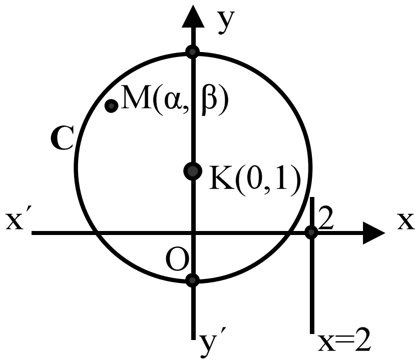
Να αποδείξετε ότι:

1. Για ν = 1 η εξίσωση (1) παριστάνει ισοσκελή υπερβολή. Να βρείτε τις εστίες της και να γράψετε την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της. **(μονάδες 8)**

2. Για κάθε ν ≥ 2 η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη που οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x΄x. **(μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 3ο

Ο κύκλος C του σχήματος έχει κέντρο το σημείο Κ(0, 1) και ακτίνα ρ = 2. Το σημείο Μ(α, β) είναι εσωτερικό του C.



Α. Να αποδείξετε ότι

(i) Οι συντεταγμένες του σημείου Μ(α, β) επαληθεύουν την σχέση: $x^2 + (y-1)^2 < 4$. **(μονάδες 3)**

(ii) Η ευθεία x = 2, αν προεκταθεί, εφάπτεται στον κύκλο C. **(μονάδες 4)**

Β. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda^2 (x-2) + 2\lambda (y-1) - x - 2 = 0 \quad (1), \qquad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. **(μονάδες 6)**

(ii) Θεωρούμε τα σημεία $N(x_0, y_0)$ με $x_o \neq 2$, τα οποία δεν ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση της μορφής (1). Να βρείτε το γεωμετρικό τους τόπο. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ του μοναδιαίου κύκλου, για τα οποία υπάρχει η ισότητα:

$$2\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma}$$

Να αποδείξετε ότι:

(i) Για τις διανυσματικές ακτίνες των Α, Β, Γ ισχύει η σχέση

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma}$$ **(μονάδες 5)**

(ii) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα. **(μονάδες 8)**

(iii) Για την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}$ είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\,(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}}) = \frac{3}{5}$$ **(μονάδες 5)**

(iv) Αν $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, τότε

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm 1$$ **(μονάδες 7)**