ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. 1.
1. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 1**.
2. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 3**.

Α. 2.
α) : Λανθασμένη
β) : Σωστή
γ) : Λανθασμένη

Β. 1.
1. $\rightarrow$ δ.
2. $\rightarrow$ α.
3. $\rightarrow$ β.
4. $\rightarrow$ ε.
5. $\rightarrow$ γ.

Β. 2.
γ. ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 2

α) Βρίσκουμε τις τιμές του λ, που μηδενίζουν τους συντελεστές του x και το σταθερό όρο του πολυωνύμου. Έχουμε: $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$.

Άρα: λ = -2 ή λ = 0 ή λ = 2. Όμοια: $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0$. Άρα: λ = 0 ή λ = 2.
Τέλος: $-\lambda + 2 = 0$. Άρα: λ = 2.
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Αν $\boxed{\lambda \neq -2 \text{ ή } \lambda \neq 0 \text{ ή } \lambda \neq 2}$, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι **3^{ου} βαθμού**.

ii. Αν $\boxed{\lambda = -2}$, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι **1^{ου} βαθμού**. (P(x) = 8x + 4).

iii. Αν $\boxed{\lambda = 0}$, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι **μηδενικού βαθμού**. (P(x) = 2).

iv. Αν $\boxed{\lambda = 2}$, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο (P(x) = 0) και **δεν ορίζεται βαθμός**.

β) Για λ = 1 έχουμε:
$P(x) = (1^3 - 4\cdot 1)x^3 + (1^2 - 2\cdot 1)x - 1 + 2 \Leftrightarrow P(x) = -3x^3 - x + 1$.
Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης P από το σημείο (1,-3), θα πρέπει: P(1) = -3.
Έχουμε: $P(1) = -3\cdot 1^3 - 1 + 1 \Leftrightarrow P(1) = -3$.

γ) $P(x) < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 1 < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 4 < 0$.
Παραγοντοποιούμε την τριτοβάθμια χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

-3	0	-1	4	$\boxed{1}$
	-3	-3	-4	
-3	-3	-4	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται:
$(x-1)(-3x^2 - 3x - 4) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 3x + 4) > 0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, (Δ = 9 – 48 = -39), άρα το τριώνυμο είναι για κάθε x ομόσημο του α (α = 3), δηλαδή είναι για κάθε x θετικό.
Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x - 1	-		+
$3x^2 + 3x + 4$	+		+
Γινόμενο	-		+

Άρα: $\boxed{x > 1}$.

ΘΕΜΑ 3

Α.

1. Για κάθε x > 0 έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5^{\log x} = x^{\log 5} \Leftrightarrow \log 5^{\log x} = \log x^{\log 5} \Leftrightarrow \log x \log 5 = \log 5 \log x$.

2. Για κάθε x , y > 0 έχουμε: $f(x\cdot y) = 5^{\log(xy)} = 5^{\log x + \log y} = 5^{\log x}\cdot 5^{\log y} = f(x)\cdot f(y)$.

3. Για κάθε x , y > 0 έχουμε: $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 5^{\log\frac{x}{y}} = 5^{\log x - \log y} = \dfrac{5^{\log x}}{5^{\log y}} = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.

4. Για κάθε ν∈N έχουμε: $f(x^{\nu}) = 5^{\log x^{\nu}} = 5^{\nu\cdot\log x} = (5^{\log x})^{\nu} = [f(x)]^{\nu}$.

Β.

$f^2(x) = 5 + 4\cdot g(x) \Leftrightarrow (5^{\log x})^2 = 5 + 4x^{\log 5}$. Από το Α.1. η προηγούμενη σχέση γράφεται: $(5^{\log x})^2 = 5 + 4\cdot 5^{\log x}$. Θέτουμε: $\boxed{5^{\log x} = \omega}$. Άρα: $\omega^2 - 4\omega - 5 = 0$.

(Δ = 16 + 20 = 36 και ω = $\dfrac{4\pm 6}{2}$). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το 5 και το –1. (Η λύση -1 απορρίπτεται, γιατί $5^{\log x} > 0$).

Έχουμε: $5^{\log x} = 5$. Η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1, άρα: logx = 1 ⇔ logx = log10

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1, άρα τελικά: $\boxed{x = 10}$.

Γ. Πρέπει: x > 0 και $x^2 - 4 > 0$. Άρα: x > 0 και x < -2 ή x > 2. Επομένως: **x > 2**.

$f(3x) > f(x^2 - 4) \Leftrightarrow 5^{\log 3x} > 5^{\log(x^2-4)}$.

Η *εκθετική συνάρτηση* με βάση 5 *είναι γνησίως αύξουσα*, *άρα*:

$\log 3x > \log(x^2 - 4)$. Η *λογαριθμική συνάρτηση* με βάση 10 *είναι γνησίως αύξουσα*, *άρα*: $3x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$.

(Δ = 9 + 16 = 25 και $x = \dfrac{3\pm 5}{2}$). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το -1 και το 4 και το τριώνυμο είναι εντός των ριζών του ετερόσημο του α (α = 1), δηλαδή είναι αρνητικό, άρα: **-1 <x<4** .

Επειδή **x > 2**, τελικά έχουμε: $\boxed{2 < x < 4}$.

ΘΕΜΑ 4

Α.

1. Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, με $\alpha_1 = \ln e$, $\alpha_4 = \ln 8 + 1$ έχουμε $\alpha_4 = \alpha_1 + (4-1)\omega \Leftrightarrow \ln 8 + 1 = \ln e + 3\omega \Leftrightarrow \ln 2^3 + 1 = 1 + 3\omega \Leftrightarrow 3\ln 2 = 3\omega$.

Άρα: $\boxed{\omega = \ln 2}$.

2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$, με $\alpha_1 = \ln e$ και αντικαθιστώντας από το Α.1. όπου ω ln2, έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\ln e + (\nu - 1)\ln 2\right] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu-1)\ln 2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu = \nu + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\ln 2 \Leftrightarrow S_\nu = \nu + \ln 2^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

3. Αντικαθιστώντας το S_ν από τον τύπο του Α.2., έχουμε:

$$\nu + \frac{1}{2}\ln 2^{\nu^3-21} = \nu + \ln 2^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2^{\nu^3-21} = \ln 2^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \Leftrightarrow \ln\left(2^{\nu^3-21}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln 2^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{\frac{\nu^3-21}{2}} = \ln 2^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \ * \Leftrightarrow \frac{\nu^3 - 21}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \Leftrightarrow \nu^3 - 21 = \nu^2 - \nu \Leftrightarrow \nu^3 - \nu^2 + \nu - 21 = 0.$$

* (Η συνάρτηση ln είναι 1-1).

Λύνουμε την τριτοβάθμια με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	-1	1	-21	**3**
	3	6	21	
1	2	7	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται: $(\nu - 3)(\nu^2 + 2\nu + 7) = 0 \Leftrightarrow \nu = 3$ ή $\nu^2 + 2\nu + 7 = 0$.

Η $\nu^2 + 2\nu + 7 = 0$ είναι αδύνατη, γιατί η διακρίνουσά της είναι αρνητική.

($\Delta = 4 - 28 = -24 < 0$). Άρα: $\boxed{\nu = 3}$.

Β.

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, με $\alpha_1 = 6, \alpha_\nu = 36$, έχουμε:

$$36 = 6 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 36 - 6 = (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 30 = (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{30}{\nu - 1} \ (1).$$

β) Επειδή ισχύει: $\alpha_{\nu-2} = 2\alpha_4$, έχουμε:

$$6 + (\nu - 3)\omega = 2(6 + 3\omega) \Leftrightarrow 6 + \nu\omega - 3\omega = 12 + 6\omega \Leftrightarrow \nu\omega - 9\omega = 6 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \nu\frac{30}{\nu-1} - 9\frac{30}{\nu - 1} = 6 \Leftrightarrow 30\nu - 270 = 6(\nu - 1) \Leftrightarrow 30\nu - 270 = 6\nu - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\nu = 264 \Leftrightarrow \nu = \frac{264}{24} \Leftrightarrow \nu = 11.$$

Άρα:: $\boxed{\nu = 11}$ $\omega = \frac{30}{11 - 1} = \frac{30}{10} = 3$.