ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002 ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) α. Να αποδειχτούν οι τύποι: $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$ και $συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $22{,}5^{ο}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Β) α. Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Αν $α_ν$, $β_ν$, $ν\in N^*$ είναι μία αριθμητική και μία γεωμετρική πρόοδος με διαφορά ω και λόγο λ αντίστοιχα, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $α_{ν+1}$	1. $\frac{ν}{2}(α_1+α_ν)$
β. $β_{ν+1}$	2. $α_1+(ν-1)ω$
γ. $α_ν$	3. $β_1λ^ν$
δ. $β_ν$	4. $α_ν+ω$
ε. $S_ν$	5. $\frac{β_{ν+1}}{λ}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\ln e=1$

β. $\log e=\frac{1}{\ln 10}$

γ. $\ln 0=1$

δ. $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ με $x>0$

ε. $α^x>0$ με $α>0$ και $x\in R$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3+αx^2+x+2$, $Q(x)=βx^2+γx+1$ και $F(x)=x^3+(2β+γ)x^2-10x+4β$, όπου $α,β,γ,x \in R$. Το P(x) έχει ρίζα το –1, το υπόλοιπο της διαίρεσης Q(x):(x-2) είναι 15 και η αριθμητική τιμή του F(x) για x=1 είναι 6.

α. Να αποδείξετε ότι α=1, β=2 και γ=3

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

β. Να λύσετε:

i) την εξίσωση P(x)=Q(x)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ii) την ανίσωση P(x)<F(x)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

iii) την εξίσωση $2ημ^3x-ημ^2x-2ημx+1=0$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Δίνεται η συνάρτηση f με f(0)=f(1)=0 και τύπο $f(x)=\log(1+e^x)-α-βx$, $α,β \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Να βρείτε τις τιμές των α,β.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\log\left[\frac{1+e^x}{(1+e)^x}\cdot 2^{x-1}\right]$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\log[(1+e^x)2^{x-1}]-f(x) \le x$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ $4^{ο}$

Η ποσότητα μιας τοξικής ουσίας Τ στα νερά μιας λίμνης ανέρχεται σε 3 μονάδες και αρχίζει να αυξάνεται με την έναρξη της λειτουργίας μιας παραλίμνιας βιομηχανίας κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

Α) α. Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας Τ θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων. (δίνεται $29929=173^2$)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας Τ που διοχετεύεται από την βιομηχανία στην λίμνη κάθε ημέρα, αδρανοποιείται κατά την διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της 82ης ημέρας;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β) Ο πληθυσμός Α=100 χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1%. Έστω $β_ν$ ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά τη διάρκεια της ν-οστής ημέρας.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $β_ν$, $ν \in N^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο: $β_ν=0{,}01Α(0{,}99)^{ν-1}$ χιλιάδες.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

β. Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από ν=5 ημέρες.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)