ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^o

Α) α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α (διάνυσμα)		ΣΤΗΛΗ Β (γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα των x)	
α.	(-1,-1)	1.	$\frac{\pi}{4}$
β.	(-1,1)	2.	$\frac{3\pi}{4}$
γ.	(1,-1)	3.	$\frac{5\pi}{4}$
δ.	(1,1)	4.	$2\pi-\frac{\pi}{4}$
ε.	(0,-1)	5.	$\frac{3\pi}{2}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Β) α. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου γράφεται στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση $d(M,\varepsilon)$ του σημείου $M(x_o,y_o)$ από την ευθεία ε: $Ax+By+\Gamma=0$, με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

Γ) Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η εξίσωση $2x^2+2y^2+4x+8y-1=0$ παριστάνει κύκλο.

β. Ο κύκλος c: $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ εφάπτεται στον άξονα y'y.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ που διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι πάντα $xx_1+yy_1=\rho^2$.

δ. Τα σημεία $M(\rho\sigma\upsilon\nu\varphi, \rho\eta\mu\varphi)$ με $\varphi\in[0,2\pi)$ και $\rho>0$ βρίσκονται στον κύκλο $x^2+y^2=\rho^2$.

ε. Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο c ο οποίος έχει κέντρο Κ και ακτίνα $\rho>0$, τότε $d(K,\varepsilon)>0$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ) Οι τιμές του ακεραίου α είναι τέτοιες, ώστε να διαιρεί το 11. Δίνονται οι επόμενες προτάσεις:

α. Υπάρχει τιμή του α, ώστε η ευθεία με εξίσωση $y=\alpha x+3$ να διέρχεται από το σημείο Α(-1,2).

β. Υπάρχει τιμή του α, ώστε το διάνυσμα $\vec{v}=(11,2)$ να είναι αντίθετο με το $\vec{u}=(\alpha,-2)$.

γ. Οι κύκλοι c_1: $(x-4)^2+(y-2)^2=16$, c_2: $(x-\alpha)^2+(y-2)^2=25$ είναι ομόκεντροι.

δ. Ο αριθμός α διαιρεί τον –11.
Από τις επόμενες απαντήσεις P_1, P_2, P_3 η μία είναι σωστή και οι άλλες δύο λάθος. Να βρείτε την σωστή απάντηση.

P_1: Οι προτάσεις (α) και (γ) είναι λάθος.

P_2: Οι προτάσεις (α) και (β) ισχύουν για την ίδια τιμή του α.

P_3: Οι προτάσεις (α), (β), (δ) είναι σωστές.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α,β,γ με 2003β+2004γ=1. Να αποδείξετε ότι:
α. (β,γ)=1

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. (αγ,β)=(α,β)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

γ. Για κάθε φυσικό αριθμό ν είναι: $(\alpha\gamma^\nu,\beta)=(\alpha,\beta)$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

δ. $[\alpha\gamma^\nu,\beta]=\gamma^\nu[\alpha,\beta]$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ 3°

Α) Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $\lambda\in R$ ώστε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

β. $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\right)\vec{\alpha}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v}=(1,2)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{u}=(-3,4)$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Β) Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ και πλευρές (ΑΒ)=γ, (ΑΓ)=β. Να αποδείξετε ότι $(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\overrightarrow{B\Delta}+(\gamma\sigma\upsilon\nu B)\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Η εστία της παραβολής c_1: $y^2=2px$, $p>0$ συμπίπτει με μία εστία της έλλειψης c_2: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $0<\beta<\alpha$.

Α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{p}{\alpha},\frac{p}{\beta}\right)$ ανήκουν σε μία ισοσκελή υπερβολή.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β) Έστω ε_1, ε_2 οι εφαπτομένες της παραβολής που άγονται από την εστία της έλλειψης που δεν είναι εστία της παραβολής.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ε_1, ε_2 και να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α, Β των ε_1, ε_2 με την παραβολή c_1.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

β. Να δείξετε ότι οι ε_1, ε_2 τέμνονται κάθετα.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

γ. Αν τα σημεία Α, Β ανήκουν στην έλλειψη c_2 να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα της ε είναι: $\varepsilon=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)