ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο

i) Οι αριθμοί β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί η μονάδα γράφεται σαν γραμμικός τους συνδιασμός.

ii) Έστω $\delta=(\alpha, \beta)$ και $\delta'=(\alpha\gamma, \beta)$.

- Αφού δ/α και δ/β είναι $\delta/\alpha\gamma$ και δ/β άρα $\delta/(\alpha\gamma, \beta) = \delta'$, δηλαδή δ/δ' (1)
- Αφού $\delta'/\alpha\gamma$ και δ'/β είναι $\delta'/\alpha\gamma$ και $\delta'/\alpha\beta$ οπότε $\delta'/(\alpha\gamma, \alpha\beta)=|\alpha|(\gamma, \beta) = |\alpha|$, άρα δ'/α, έτσι $\delta'/(\alpha, \beta)=\delta$ (2). Οι (1) και (2) δίνουν $\delta=\delta'$.

iii) Η πρόταση $p(0)$: $(\alpha\gamma^0, \beta)=(\alpha, \beta)$ είναι αληθής.

Έστω ότι ισχύει η $p(\nu)$: $(\alpha\gamma^\nu, \beta) = (\alpha, \beta)$ (3).

Θα δειχτεί η $p(\nu+1)$: $(\alpha\gamma^{\nu+1}, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Είναι
$$\begin{aligned}(\alpha\gamma^{\nu+1}, \beta) &= (\alpha\gamma^\nu\gamma, \beta)\\ &= ((\alpha\gamma^\nu)\gamma, \beta) \quad (\text{από την ii) για α το } (\alpha\gamma^\nu))\\ &\overset{(ii)}{=} (\alpha\gamma^\nu, \beta) \overset{(3)}{=} (\alpha, \beta)\end{aligned}$$

iv) $$[\alpha\gamma^\nu, \beta] = \frac{|\alpha\gamma^\nu\beta|}{(\alpha\gamma^\nu, \beta)} = \frac{|\gamma|^\nu|\alpha\beta|}{(\alpha, \beta)} = |\gamma|^\nu[\alpha, \beta]$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Επειδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} // \vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}.$$

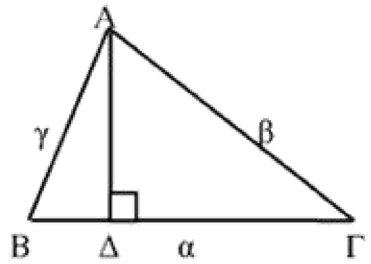
β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^{2}}\right)$ άρα

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^{2}}\right)\vec{\alpha}$$

γ) $\vec{v}_1=\pi\rho o\beta_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}^{2}}\right)\vec{u}=\dfrac{5}{25}\vec{u}=(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=\ldots$$

Β.



$$(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\vec{\mathrm{B}\Delta}+(\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B})\vec{\Gamma\Delta}=(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\,\pi\rho o\beta_{\vec{\mathrm{B}\Gamma}}\vec{\mathrm{B}A}+(\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B})\,\pi\rho o\beta_{\vec{\mathrm{B}\Gamma}}\vec{\Gamma A}$$

$$=(\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B})\left(\frac{\vec{\mathrm{BA}}\,\vec{\mathrm{B}\Gamma}}{\left(\vec{\mathrm{B}\Gamma}\right)^{2}}\right)\vec{\mathrm{B}\Gamma}+(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\left(\frac{\vec{\Gamma\mathrm{A}}\,\vec{\Gamma\mathrm{B}}}{\left(\vec{\Gamma\mathrm{B}}\right)^{2}}\right)\vec{\Gamma\mathrm{B}}$$

$$=(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\left(\frac{\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}{\alpha^{2}}\right)\vec{\mathrm{B}\Gamma}+(\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B})\left(\frac{\beta\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha^{2}}\right)\vec{\Gamma\mathrm{B}}=\vec{0}.$$

<u>ή</u>

$(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\vec{\mathrm{B}\Delta}+(\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B})\vec{\Gamma\Delta}=(\Gamma\Delta)\vec{\mathrm{B}\Delta}+(\mathrm{B}\Delta)\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0}$ γιατι $\left|(\Gamma\Delta)\vec{\mathrm{B}\Delta}\right|=\left|(\mathrm{B}\Delta)\vec{\Gamma\Delta}\right|$ και $(\Gamma\Delta)\vec{\mathrm{B}\Delta}\uparrow\downarrow(\mathrm{B}\Delta)\vec{\Gamma\Delta}$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν Ε $\left(\frac{p}{2},\ 0\right) = (\pm\gamma, 0)$ είναι η κοινή εστία, τότε:

$$\frac{p}{2} = \pm\gamma = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} = \alpha^2 - \beta^2 \qquad (1)$$

i) Η (1) δίνει $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{p}\right)^2 = \frac{1}{4}$ οπότε το Μ ανήκει στην ισο-

σκελή υπερβολή $\qquad x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$

ii) Έστω Ε$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ η κοινή εστία και Ε΄$\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$.

Αν $(x_1,\ y_1)$ είναι σημείο επαφής τότε: $\quad y_1{}^2 = 2px_1 \quad (2)$
και η εφαπτόμενη έχει εξίσωση: $\quad yy_1 = p(x + x_1) \quad (3)$ η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του Ε΄, αν και μόνον αν:

$$p\left(-\frac{p}{2} + x_1\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{p}{2},$$

Από τη (2) προκύπτει $y_1 = \pm p$. Έτσι, τα σημεία επαφής είναι τα

$$A\left(\frac{p}{2}, p\right), \quad B\left(\frac{p}{2}, -p\right)$$

και οι εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις

$$y = x + p/2, \quad y = -\ x - p/2$$

iii) Είναι $\lambda_1\lambda_2 = -1$ κ.λ.π.

iv) Τα $A\left(\frac{p}{2},p\right)$, $B\left(\frac{p}{2},-p\right)$ ανήκουν στην έλλειψη αν και μόνον αν:

$$\frac{p^2}{4\alpha^2}+\frac{p^2}{\beta^2}=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}+4\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}+4\frac{\gamma^2}{(\alpha^2-\gamma^2)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}+4\frac{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}=1 \qquad \left(\text{γιατί } \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2+4\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}=1 \Leftrightarrow \varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=0 \quad \text{(διτετράγωνη)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2=3\pm2\sqrt{2} \Leftrightarrow \varepsilon^2=3-2\sqrt{2} \quad \text{γιατί } 0<\varepsilon<1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$