

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Θέμα 1ο

A_1, A_2, A_3 Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 60-61)

$B_1:$ α 4

β 1

γ 2

B_2 το Γ

Θέμα 2ο

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot 1 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$(4\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = 16\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} = 16 + 4 - 8 = 12$$

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

β) Από τη διανυσματική ακτίνα μέσου είναι

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG}$$

ή $2\vec{AM} = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - 3\vec{\beta}$

ή $\vec{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Ακόμα, $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = -3\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

γ) Είναι $\cos(\widehat{AM, BG}) = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BG}}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{BG}|}$ (1)

αλλά $\vec{AM} \cdot \vec{BG} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (-4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})$

$$= 4\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$$

$$= 4 - 2 + 1 = 3$$

και $|\vec{AM}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 3$, άρα $|\vec{AM}| = \sqrt{3}$

$$|\overline{B\Gamma}|^2 = |-4\bar{\beta} - 2\bar{\alpha}|^2 = (4\bar{\beta} - 2\bar{\alpha})^2 = 12, \text{ \u03c1\u03c1\u03b1 } |\overline{B\Gamma}| = 2\sqrt{3}$$

\u038c\u03c4\u03c3\u03b9 \u03b7 (1) \u03b4\u03b9\u03bd\u03b5\u03b9

$$\widehat{\text{cyn}}(\overline{AM}, \overline{B\Gamma}) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ \u03c1\u03c1\u03b1: } \widehat{(\overline{AM}, \overline{B\Gamma})} = \frac{\pi}{3}$$

\u0398\u03b5\u03bc\u03b1 3\u03b1

1\u03c9\u03c3 \u03c4\u03c1\u03cc\u03c0\u03c9\u03c3.

\u03b1) \u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03b9 \u03c1 \u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c0\u03b5\u03c1\u03b9\u03c4\u03c4\u03cc\u03c3, \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03b5\u03b9 \u03b1\u03ba\u03b5\u03c1\u03b1\u03b9\u03c9\u03c3 \u03bb, \u03c9\u03c3\u03c4\u03b5:

$$\alpha = 2\lambda + 1 \text{ \u03c1\u03c1\u03b1 } \kappa - 1 = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda + 2$$

\u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03b9, $\beta = 3\kappa + 1 = 3(2\lambda + 2) + 1 = 6\lambda + 6 + 1 = 6\lambda + 7 = 2(3\lambda + 3) + 1$ \u03c1\u03c1\u03b1 \u03b2 = \u03c0\u03b5\u03c1\u03b9\u03c4\u03c4\u03cc\u03c3

\u03b2) \u038c\u03b9\u03bd\u03b1 $\kappa - 1/3\kappa + 1$ \u03c0\u03c1\u03b5\u03c0\u03b5\u03b9 $\kappa - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 1$ (1)

\u039a\u03b9 \u03c0\u03c1\u03cc\u03c6\u03b1\u03bd\u03c9\u03c3 $\kappa - 1/3(\kappa - 1)$

\u038c\u03c1\u03b1 $\kappa - 1/3\kappa + 1 - 3(\kappa - 1) \Leftrightarrow \kappa - 1/4$

\u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03b9 $\kappa - 1 = \pm 1, \kappa - 1 = \pm 2, \kappa - 1 = \pm 4$

\u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03b9, $\kappa = 0, \kappa = 2, \kappa = -1, \kappa = 3, \kappa = -3, \kappa = 5$ \u0394\u03b5\u03ba\u03c4\u03b5\u03c3 \u03c4\u03b9\u03bc\u03b5\u03c3 \u03b1\u03c0\u03cc (1).

\u03b3) i) $2\alpha + 1 = 2(\kappa - 1) + 1 = 2\kappa - 1$

$$\beta - 3 = 3\kappa + 1 - 3 = 3\kappa - 2$$

\u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03c9 $\delta = (2\alpha + 1, \beta - 3)$ \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5

$$\delta/2\alpha + 1 \Leftrightarrow \delta/2\kappa - 1$$

$$\delta/\beta - 3 \Leftrightarrow \delta/3\kappa - 2$$

\u038c\u03c4\u03c1\u03c1\u03b9 $\delta/3(2\kappa - 1) - 2(3\kappa - 2) \Leftrightarrow \delta/1, \text{ \u03c1\u03c1\u03b1 } \delta = 1$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad [2\alpha + 1, \beta - 3] &= |(2\alpha + 1)(\beta - 3)| \\ &= |(2\kappa - 1)(3\kappa - 2)| \\ &= |6\kappa^2 - 7\kappa + 2| \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $6\kappa^2-7\kappa+2$ έχει ρίζες $\kappa_1 = \frac{1}{2}$, $\kappa_2 = \frac{2}{3}$ και γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του, όπου όμως δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ . Έτσι $6\kappa^2-7\kappa+2 > 0$ οπότε

$$|6\kappa^2-7\kappa+2| = 6\kappa^2-7\kappa+2$$

Και έτσι $|2\alpha+1, \beta-3| = 6\kappa^2-7\kappa+2$

2ος τρόπος.

Από $\alpha = \kappa-1$ και $\beta = 3\kappa+1$ προκύπτει $\beta = 3\alpha+4$

- α) με α περιττό είναι 3α περιττός, έτσι $3\alpha+4$ περιττός, άρα β περιττός.
- β) $\alpha/\beta \Leftrightarrow \alpha/3\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha/4 \Leftrightarrow \kappa-1/4$ κλπ.
- γ) $(2\alpha+1, \beta-3) = (2\alpha+1, 3\alpha+1) = (2\alpha+1, 3\alpha+1-2\alpha-1) = (2\alpha+1, \alpha) = (2\alpha+1-2\alpha, \alpha) = (1, \alpha) = 1$
- δ) παρομοίως.

3ος τρόπος για το β).

$$\alpha/\beta \Leftrightarrow \beta = \lambda\alpha \Leftrightarrow 3\kappa+1 = \lambda(\kappa-1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \kappa = \frac{\lambda+1}{\lambda-3} = \frac{\lambda-3+1}{\lambda-3} = 1 + \frac{4}{\lambda-3} \in \mathbb{Z}$$

άρα $\lambda-3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ και άρα $\kappa = 1+(\pm 4), 1+(\pm 2), 1+(\pm 1)$ κλπ. (... με τους περιορισμούς των α, λ).

Θέμα 4ο.

α) $C_1: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 10$
 $C_2: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 16$

β) Είναι $(KA) = \dots = \sqrt{5} < \rho_1 = \sqrt{10}$
 $(KB) = \dots = \sqrt{13}, \rho_1 < \sqrt{13} < \rho_2 = 4$

Άρα:

- Το A ανήκει στο κυκλικό δίσκο που ορίζει ο C_1 άρα στο A η λήψη είναι "πολύ καλή".
- Το B είναι εξωτερικό σημείο του C_1 και εσωτερικό του C_2 οπότε στο β η λήψη είναι "καλή".

γ) (Σχετική θέση ευθείας και κύκλου.)

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|12-6-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

και αφού $\sqrt{10} < \frac{5}{\sqrt{2}} < 4$
είναι $\rho_1 < d(K, \varepsilon) < \rho_2$

Επομένως, υπάρχει τμήμα με "καλή" λήψη και δεν υπάρχει αντίστοιχο τμήμα με "πολύ καλή" λήψη.