ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x - ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, $\theta>0$

β. Αν α>0 με α ≠1, τότε για οποιουσδήποτε θ_1 , $\theta_2 > 0$ ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 \cdot \log_\alpha\theta_2$

γ. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

δ. $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

ε. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$.

Μονάδες 10

Γ. Πότε μία ακολουθία λέγεται:

α. αριθμητική πρόοδος;

β. γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

Απάντηση:

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 67.

Β.

α	Σ
β	Λ
γ	Λ
δ	Σ
ε	Λ

Γ. α. Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ιδίου πάντοτε αριθμού.

β. Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολ/σμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $α_1 = συν2α$, $α_2 = συν^2α$, $α_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < α < \frac{π}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

α. Οι αριθμοί $α_1$, $α_2$, $α_3$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου όταν $α_2 = \frac{α_1 + α_3}{2}$ ή $συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$ που ισχύει.

β. $ω = α_2 - α_1 = α_3 - α_2 = 1 - συν^2α = ημ^2α$

γ. $α_1 + α_2 + α_3 + α_4 + α_5 = \frac{5}{2}\left[2α_1 + (5-1)ω\right] =$

$= \frac{5}{2}\left(2συν2α + 4ημ^2α\right) = \frac{5}{2}\left[2\left(1 - 2ημ^2α\right) + 4ημ^2α\right] =$

$= \frac{5}{2}\left(2 - 4ημ^2α + 4ημ^2α\right) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση</u>:

α. Με αντικατάσταση στο πολυώνυμο P(x) των τιμών του $x = -\frac{1}{2}$ και $x = -1$ παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c}\kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa+\lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 7\\ \kappa(-1)^3 - (\kappa+\lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 = 23\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{8}\kappa - (\kappa+\lambda)\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 7\\ -\kappa - (\kappa+\lambda) - \lambda + 1 = 23\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-\kappa - 2(\kappa+\lambda) - 4\lambda + 8 = 56\\ -\kappa - \kappa - \lambda - \lambda + 1 = 23\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda = 48\\ -2\kappa - 2\lambda = 22\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-3\kappa - 6\lambda = 48\\ -2\kappa - 2\lambda = 22\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\kappa + 2\lambda = -16\\ \kappa + \lambda = -11\end{array}\right\}$$

Η λύση του συστήματος είναι $(\kappa,\lambda) = (-6,-5)$.

β. Το P(x) για τις τιμές κ = -6 και λ = -5 γράφεται:

$P(x) = -6x^3 - (-11)x^2 - 5x + 1 = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 & 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{+6x^3 + 3x^2 \qquad\qquad} & -3x^2 + 7x - 6 \\
14x^2 - 5x + 1 & \\
\underline{-14x^2 - 7x \qquad} & \\
-12x + 1 & \\
\underline{+12x + 6} & \\
7 &
\end{array}
$$

Άρα: $-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7$

γ. Η ανίσωση $P(x) > 7$ γράφεται:

$(2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7 > 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 1)(3x^2 - 7x + 6) < 0.$

Όμως $3x^2 - 7x + 6 > 0$ για κάθε $x \in IR$, αφού
$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$.

Επομένως η ανίσωση τελικά γίνεται: $2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

α. Το πεδίο ορισμού της f(x) είναι το σύνολο

$\{x \in R$: $e^x + 5 \neq 0$ και $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0\}$.

Όμως $e^x + 5 > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η $e^x + 5 \neq 0$ ισχύει για κάθε $x \in R$, ενώ η $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0$.

Όμως η συνάρτηση $g(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R (1).

Οπότε $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(0,+\infty)$.

β. $f(x)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)=\ln 2^2 \overset{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow}$

$\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}=4 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 21 = 0$.

Αν θέσουμε $e^x = y > 0$ η τελευταία γίνεται:

$y^2 - 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow$ ($y = -3$ απορρίπτεται ή $y = 7$).

Άρα $e^x = 7 \Leftrightarrow \ln 7$.

γ. $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) > \ln 1 \overset{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 1 \overset{e^x+5>0}{\Leftrightarrow}$

$e^{2x} - 1 > e^x + 5 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 > 0$.

Αν θέσουμε $e^x = y > 0$ η τελευταία γράφεται:

$y^2 - y - 6 > 0 \Leftrightarrow (y - 3) \cdot (y + 2) > 0 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > 3$.

Δηλαδή $e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 3} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x > \ln 3$.