ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R).

Μονάδα 1

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.

Μονάδα 1

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$.

Μονάδα 1

δ. Σε κύκλο (Ο, R), το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ^o δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$.

Μονάδα 1

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$.

Μονάδα 1

Β. **α.** Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (Ο, R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

<u>Απάντηση</u>:

Α.1. Θεωρία, θεώρημα IV σελ. 214 σχολ. βιβλίου.

Α.2.

α	Σ
β	Σ
γ	Λ
δ	Λ
ε	Λ

Β. Θεωρία σελ. 238 σχολ. βιβλίου.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$,

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

Μονάδες 15

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$ **.**

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

α. Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Έτσι η δοσμένη σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$ γράφεται:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \alpha^2.$$

β. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A.$$

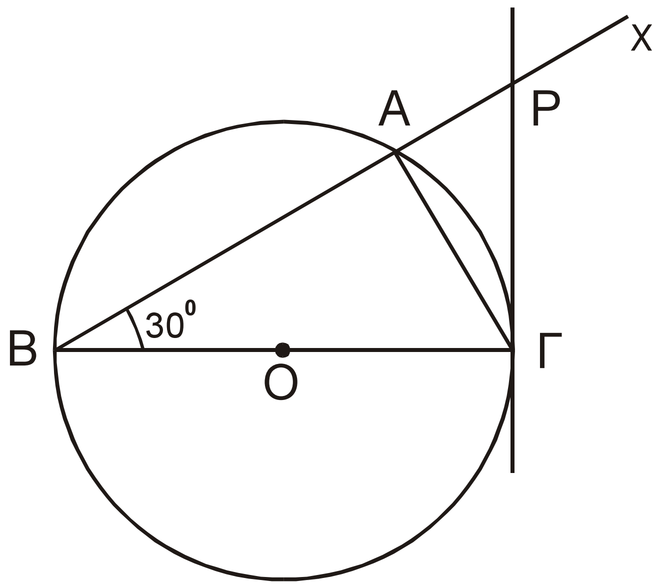
Λόγω της σχέσης $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ του (α) ερωτήματος προκύπτει:

$$2\text{συν}A = 1 \Leftrightarrow \text{συν}A = \frac{1}{2}.$$

Άρα η γωνία Α είναι 60°.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία ΓΒx να είναι 30^o. Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ.



Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΓ = R.

Μονάδες 5

β. $\dfrac{(\mathrm{P}\mathrm{B}\Gamma)}{(\mathrm{P}\mathrm{A}\Gamma)} = 4$.

Μονάδες 10

γ. $\mathrm{P}\Gamma = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

α. Στο εγγεγραμμένο στον κύκλο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι 90^o, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Επομένως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ορθογώνιο στο Α.

Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{B}}=30^o$, προκύπτει από γνωστό θεώρημα ότι:

$$\mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{2R}{2} = R\,.$$

β. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma P}}$ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού ΓΡ εφαπτόμενη στον κύκλο, στο σημείο Γ.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{PB\Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{P\Gamma A}}$ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την $\hat{\mathrm{P}}$ κοινή γωνία.

Επομένως:

$\dfrac{(\mathrm{PB\Gamma})}{(\mathrm{PA\Gamma})} = \lambda^2$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.

Όμως $\lambda = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = 2$.

Οπότε $\dfrac{(\mathrm{PB\Gamma})}{(\mathrm{PA\Gamma})} = 2^2 = 4$.

γ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$$

οπότε

$$AB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$$

Άρα

$$\mathrm{AB} = R\sqrt{3} \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma P}}$ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{BP}$$

Επομένως

$$A\Gamma^2 = AB \cdot AP$$

οπότε

$R^2 = R\sqrt{3} \cdot \mathrm{AP}$ ή

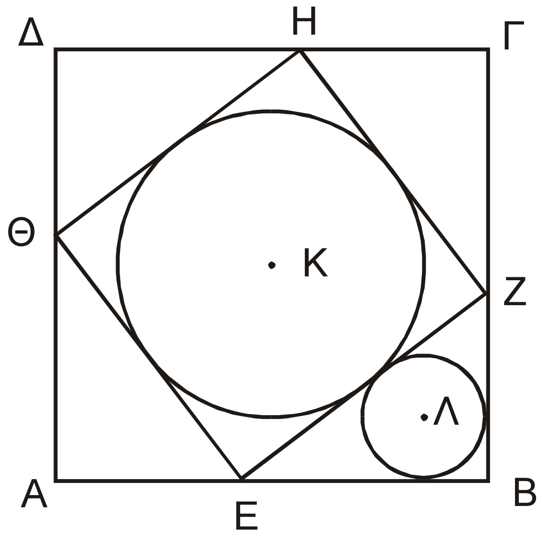
$$\mathrm{AP} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Ακόμα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AP\Gamma}}$ έχουμε $\mathrm{P} = 60^o$, οπότε $\mathrm{A\Gamma P} = 30^o$. Επομένως ΡΓ=2ΑΡ

και λόγω της (2) προκύπτει ότι $\mathrm{P\Gamma} = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε:
ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3 cm.



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι ρ = 1cm.

Μονάδες 12

γ. Εάν (Κ, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ).

Μονάδες 8

<u>Απάντηση</u>:

α. Η πλευρά α του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm. Έτσι:

$$\alpha^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 25\text{cm}^2 \Leftrightarrow \alpha = 5\text{cm} .$$

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι 25cm^2.

β. $(\text{EBZ}) = \dfrac{\text{EB} \cdot \text{ZB}}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{cm}^2$.

Όμως είναι και (ΕΒΖ) = ρ • τ όπου $\tau = \dfrac{3+4+5}{2} = 6\text{cm}$. Έτσι:

6 • ρ = 6 άρα ρ = 1cm.

γ. Είναι $\text{R} = \dfrac{5}{2}\text{cm}$ και ρ = 1cm, οπότε ο ζητούμενος λόγος ισούται με:

$$\frac{\pi R^2}{\pi \rho^2} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} .$$