ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

Β. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 9

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν det $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 .$$

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει: $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha , \beta] = (\alpha , \beta)$ όπου $[\alpha , \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β.

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2+B^2-4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2} , -\frac{B}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1,y_1).
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** *και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της* **Στήλης Β** *που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	**1.** $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**2.** $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	**3.** $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} + \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**4.** $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

<u>Απάντηση</u>:

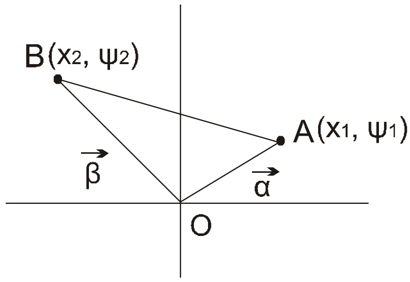
Α. Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.

Β. Έστω $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$. Με αρχή το Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.



Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{OAB}$ έχουμε:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B$$

Όμως είναι:

$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2$

$(OA)^2 = x_1^2 + \psi_1^2$

και $(OB)^2 = x_2^2 + \psi_2^2$

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$(x_2 - x_1)^2+(\psi_2 - \psi_1)^2 = x_1^2+\psi_1^2+x_2^2+\psi_2^2 - 2(OA)(OB)\,\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B$

ή μετά από πράξεις:

$$2x_1x_2+2\psi_1\psi_2 = +2(OA)(OB)\,\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B$$

και επειδή:

$$(OA)(OB)\,\sigma\upsilon\nu(A\hat{O}B) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

Προκύπτει τελικά ότι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2+\psi_1\psi_2$$

Γ.

α	β	γ	δ
Σ	Λ	Λ	Σ

Δ.

Στήλη Α	Στήλη Β
α	2
β	3
γ	1
δ	6

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

Α. Έστω $\alpha = 2\kappa+1$ και $\beta = 2\lambda+1$ με $\kappa,\lambda\in Z$ δύο περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε:

$\alpha \cdot \beta = (2\kappa+1)(2\lambda+1) =$
$= 4\kappa\lambda+2\kappa+2\lambda+1 =$
$= 2(2\kappa\lambda+\kappa+\lambda)+1 =$
$= 2\rho+1$

όπου $\rho = 2\kappa\lambda+\kappa+\lambda$ ακέραιος αριθμός.

Άρα το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ = περιττός αριθμός.

Β.

(i) Αν α άρτιος ακέραιος αριθμός, δηλαδή α = 2λ με $\lambda \in Z$ τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{2\lambda(4\lambda^2+1)}{2} = \frac{2\left[\lambda(4\lambda^2+1)\right]}{2} = \lambda(4\lambda^2+1) \in Z$$

(ii) Αν α περιττός ακέραιος αριθμός, δηλαδή α = 2λ+1 με $\lambda \in Z$ τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{(2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2+1\right]}{2} =$$

$$= \frac{(2\lambda+1)\left[4\lambda^2+4\lambda+1+1\right]}{2} =$$

$$= \frac{(2\lambda+1)\left[4\lambda^2+4\lambda+2\right]}{2} =$$

$$= \frac{2\left[(2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1)\right]}{2} =$$

$$= (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) \in Z \qquad (1)$$

Γ. Από το συμπέρασμα (1) του ερωτήματος Β έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha\cdot(\alpha^2+1)}{2} = (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) =$$

$= (2\lambda+1)[2(\lambda^2+\lambda)+1] =$

$= (2\lambda+1)(2\rho+1)$: περιττός ακέραιος λόγω του ερωτήματος Α με $\rho = \lambda^2+\lambda \in Z$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία y= x – 1.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση</u>:

Α. Η εξίσωση $y^2 = 4x$ γράφεται $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$, οπότε είναι ρ = 2. Έτσι η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{\rho}{2},0\right)$ ή Ε(1,0). Η διευθετούσα είναι $x = -\frac{\rho}{2}$ ή x = -1.

Β. Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την εστία Ε(1,0) περιγράφεται από τις εξισώσεις:

(η_λ): y - 0 = λ(x-1) $\Leftrightarrow$ y = λx - λ $\Leftrightarrow$ λx + (-1)y - λ = 0, $\lambda \in \mathrm{IR}$
(ε): x = 1.

$d(0,\varepsilon) = 1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η (ε) δεν είναι λύση.

Αναζητούμε έτσι $\lambda \in \mathrm{IR}$ ώστε

$$d(0,\eta_\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1)\cdot 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 = 2(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Έτσι προκύπτουν δύο ευθείες:

α) Για λ = 1 : y = x - 1.
β) Για λ = -1 : y = -x + 1.

Γ. Αν (ε΄) η ζητούμενη ευθεία και $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της (ε΄) με την παραβολή, η (ε΄) έχει τη μορφή:

$yy_1 = \rho(x + x_1)$ ή $yy_1 = 2(x + x_1)$.

Επειδή $y_1 \neq 0$ η τελευταία γράφεται $y = \frac{2}{y_1}x + 2\frac{x_1}{y_1}$.

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης προκύπτει $\lambda = \frac{2}{y_1}$.
Λόγω της παραλληλίας με την y = x - 1 πρέπει:
$\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2.$
Όμως $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε
$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 2^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$.
Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$y \cdot 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\text{συν}\theta - 2y\text{ημ}\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ(1,2).

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

Μονάδες 7

<u>Απάντηση</u>:

Α. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$(x^2 - 2x\text{συν}\theta) + (y^2 - 2y\text{ημ}\theta) = 1$ ή
$(x^2 - 2x\text{συν}\theta + \text{συν}^2\theta) + (y^2 - 2y\text{ημ}\theta + \text{ημ}^2\theta) = 2$ ή
$(x - \text{συν}\theta)^2 + (y - \text{ημ}\theta)^2 = 2$ (1)
Η τελευταία όμως παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(συνθ, ημθ) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Β. Από την εξίσωση (1) για $\theta = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει ο κύκλος:

$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2$ του οποίου το κέντρο είναι Κ(0,1).

Είναι: $\lambda_{KM} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K} = \frac{2-1}{1-0} = 1$. Επειδή η εφαπτομένη ευθεία στο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΜ, προκύπτει ότι θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = -1 και εξίσωση:

$y - 2 = -1(x - 1)$.
Άρα $y = -x + 3$.

Γ. Οι συντεταγμένες x, y των κέντρων των παραπάνω κύκλων είναι:

$x = \text{συν}\theta$, $y = \text{ημ}\theta$.
Έτσι προκύπτει $x^2 + y^2 = \text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta$ ή $x^2 + y^2 = 1$.

Άρα τα κέντρα αυτά βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.