Άλγεβρα
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 6,5

Α.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω πολυώνυμο P(x) και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x–ρ και π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x–ρ, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho)\,\pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho)\,P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

Β.1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το – 3 .

Μονάδες 6

Β.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$ **β.** $x - 1$ **γ.** x **δ.** $x + \frac{5}{4}$

Μονάδες 6,5

Απάντηση:

Α.1. Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 = - \alpha_\nu \rho^\nu - \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} - \ldots - \alpha_1 \rho \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 = \rho\,(- \alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1).$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο
$- \alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1$ είναι ακέραιος.
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Α.2. Η σωστή απάντηση είναι η δ.

Β.1. α → Λ, β → Λ, γ → Σ

Β.2. Η σωστή απάντηση είναι η α.

Ζήτημα 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5\,\text{συν}2α - 14\,\text{συν}α - 7 = 0\ .$$

α. Να δείξετε ότι συνα = -3/5

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει π ≤ α ≤ 3π/2, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α και εφ2α.

Μονάδες 15

Απάντηση:

α. Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$5\cdot(2\,\text{συν}^2 α - 1) - 14\,\text{συν}\,α - 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$10\,\text{συν}^2 α - 5 - 14\,\text{συν}\,α - 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$10\,\text{συν}^2 α - 14\,\text{συν}\,α - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$5\,\text{συν}^2 α - 7\,\text{συν}\,α - 6 = 0$$

Θέτουμε συν α = ψ με ψ ∈ [-1, 1] κι έχουμε:

$$5ψ^2 - 7ψ - 6 = 0$$

Είναι:

$$Δ = 49 + 120 = 169 > 0$$

Οπότε:

- $ψ_1 = \frac{7-\sqrt{169}}{10} = \frac{7-13}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$ δεκτή, αφού $-\frac{3}{5} \in [-1,1]$
- $ψ_1 = \frac{7+\sqrt{169}}{10} = \frac{7+13}{10} = \frac{20}{10} = 2$ απορρίπτεται., αφού $2 \notin [-1,1]$

Άρα: συν α = -3/5

β. Από την βασική ταυτότητα:

$$\text{ημ}^2 α + \text{συν}^2 α = 1, \qquad \text{με συν}\,α = -3/5$$

έχουμε:

$$\text{ημ}^2 α + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\text{ημ}^2 α = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$
$$\text{ημ}^2 α = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$
$$\text{ημ}\,α = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Επειδή $\pi \le \alpha \le 3\pi/2$, είναι $\eta\mu\,\alpha \le 0$, οπότε:

$$\eta\mu\,\alpha = -4/5$$

Είναι:

- $\eta\mu\,2\alpha = 2\,\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha = 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$
- $\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=\frac{18}{25}-1=-\frac{7}{25}$
- $\varepsilon\varphi\,2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{24/25}{-7/25}=-\frac{24}{7}$

Ζήτημα 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Είναι: $\alpha_3 = \log 125 = \log 5^3 = 3\log 5$.

Επειδή η πρόοδος είναι αριθμητική με διαφορά ω, έχουμε ότι:

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega.$$

Άρα:

$$\alpha_1 = 3\log 5 - 2\log 5 = \log 5.$$

β. Επειδή είναι :

$\alpha_1 = \log 5$ και $\omega = \log 5$, προκύπτει ότι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega =$$

$$= \log 5 + (\nu - 1)\log 5 =$$

$$= \log 5 + \nu\log 5 - \log 5 =$$

$$= \nu\log 5.$$

Επομένως:

$A = a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{29} =$

$= 21 \log 5 + 22 \log 5 + \ldots + 29 \log 5 =$

$= (21 + 22 + \ldots + 29) \log 5.$

Όμως το άθροισμα 21 + 22 + … + 29 είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμ. προόδου με πρώτο όρο το 21, διαφορά 1 και πλήθος όρων 9. Οπότε

$$21 + 22 + \ldots + 29 = \frac{[2 \cdot 21 + (9-1) \cdot 1] \cdot 9}{2} = \frac{(42+8) \cdot 9}{2} = \frac{50 \cdot 9}{2} = 25 \cdot 9 = 225$$

Άρα:

$A = 225 \log 5.$

γ. Επειδή η πρόδος (β_ν) είναι γεωμετρική, ο λόγος της θα είναι:

$$\lambda = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2 \log 5}{\log 5} = 2$$

οπότε:

$\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \log 5 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1} \cdot \log 5$

Άρα

$B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \ldots + \beta_{1999} + \beta_{2001} =$

$= \log 5 + 2^2 \log 5 + 2^4 \log 5 + \ldots + 2^{1998} \log 5 + 2^{2000} \log 5 =$

$= (1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{1998} + 2^{2000}) \log 5.$

Όμως το άθροισμα

$1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{1998} + 2^{2000} =$

$1 + (2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{1998} + 2^{2000}) =$

$1 + [2^{2 \cdot 1} + 2^{2 \cdot 2} + \ldots + 2^{2 \cdot 999} + 2^{2 \cdot 1000}] =$

$1 + [(2^2)^1 + (2^2)^2 + \ldots + (2^2)^{999} + (2^2)^{1000}] =$

$= 1 + (4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{999} + 4^{1000}) =$

$$= 1 + \frac{4(4^{1000} - 1)}{4 - 1} = 1 + \frac{4}{3}(4^{1000} - 1) = 1 + \frac{4^{1001}}{3} - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}4^{1001} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^{1001} - 1)$$

Άρα:

$$B = \frac{1}{3}(4^{1001} - 1) \log 5$$

Ζήτημα 4ο

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου $\alpha, \beta \in \Re$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$ για $t \geq 0$

Μονάδες 10

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7

Απάντηση:

α. Όταν ο χρόνος είναι $t = 0$, τότε η αρχική τιμή θα είναι $Q(0) = 3$, οπότε:

$$\ln Q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

Άρα:

$$\beta = \ln 3 \qquad (1)$$

Μετά από 6 μήνες (δηλαδή μετά από μισό έτος, t=1/2) η τιμή του προϊόντος θα είναι:

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

οπότε:

$$\ln Q\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \ln 3$$

Επομένως:

$$\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\alpha + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 - \ln 2 = \frac{1}{2}\alpha + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$-\ln 2 = \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \ln(2^{-2}) \qquad (2)$$

Από την σχέση $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$ λόγω των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\ln Q(t) = t\cdot \ln 2^{-2} + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 2^{-2t} + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 3\cdot 2^{-2t} \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 3\cdot 4^{-t}$$

Άρα:

$$Q(t) = 3\cdot 4^{-t}$$

β. Αν είναι:

$$Q(t) = \frac{1}{16} Q(0) = \frac{1}{16}\cdot 3$$

τότε σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο έχουμε:

$$\frac{3}{16} = 3\cdot 4^{-t} \Leftrightarrow \frac{1}{16} = 4^{-t} \Leftrightarrow 4^{-2} = 4^{-t}$$

Άρα:

$$t = 2 \text{ έτη.}$$

γ. Πρέπει:

$$Q(t) \le \frac{1}{9}\cdot Q(0) \Leftrightarrow Q(t) \le \frac{1}{9}\cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$3\cdot 4^{-t} \le \frac{3}{9} \Leftrightarrow 3\cdot 4^{-t} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$4^{-t} \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4^{-t} \le 3^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4^t} \le \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 4^t \ge 3^2$$

($4^t > 0$ για κάθε $t \ge 0$ και $3^2 > 0$)

Επειδή $4^t > 0$ για κάθε $t \ge 0$ και $3^2 > 0$, λογαριθμίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε:

$$\ln 4^t \ge \ln 3^2 \Leftrightarrow t \ln 4 \ge 2\cdot \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$t \ge \frac{2\ell n3}{\ell n4} \Leftrightarrow t \ge \frac{2\ell n3}{2\ell n2} \Leftrightarrow$$

$$t \ge \frac{\ell n3}{\ell n2}$$

Άρα:

$$t = \frac{\ell n3}{\ell n2} \quad \text{έτη.}$$