Γεωμετρια
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

Α2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.*

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

$$(\hat{A} = 90^\circ)$$

και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. AB^2	**1.** $AB^2+B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**3.** $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2-AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2.***

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

$$(\hat{A} = 90^\circ)$$

με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε ΒΔ=1 και ΒΓ=3.

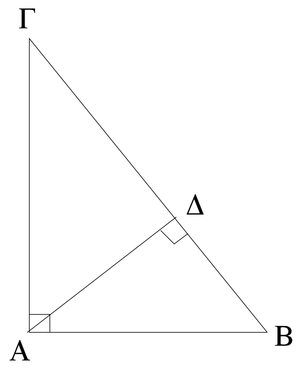
Β1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:
α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

Β2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:
α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

Απάντηση:



Α1. Θεώρημα 9.4, σελίδα 211 σχολικού βιβλίου.

Α2. α $\leftrightarrow$ 4
β $\leftrightarrow$ 5
γ $\leftrightarrow$ 2

Β1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$$

κι επειδή:

$$ΒΔ = 1 \quad \text{και} \quad ΔΓ = ΒΓ - ΒΔ = 3 - 1 = 2$$

προκύπτει ότι:

$$ΑΔ^2 = 1 \cdot 2 = 2$$

οπότε:

$$ΑΔ = \sqrt{2}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (**γ**).

Β2. Ισχύει επίσης ότι:

$$ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$$

κι επειδή:

$$ΒΔ = 1 \quad \text{και} \quad ΒΓ = 3$$

προκύπτει ότι:

$$ΑΒ^2 = 1 \cdot 3 = 3$$

οπότε:

$$ΑΒ = \sqrt{3}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (**α**).

Ζήτημα 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

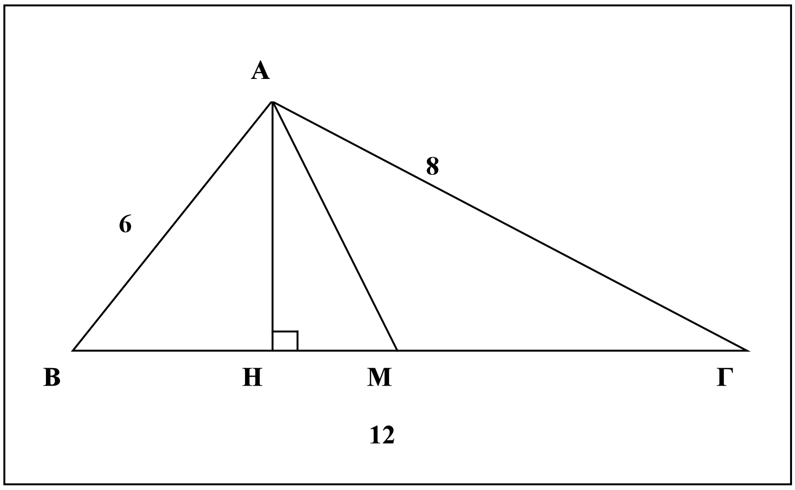
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

Απάντηση:



α. Είναι:

$$ΑΒ^2 = 6^2 = 36$$
$$ΒΓ^2 = 12^2 = 144$$
$$ΑΓ^2 = 8^2 = 64 \quad \text{και}$$
$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 36 + 64 = 100$$

Οπότε:

$$ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο στο Α.

β. Από το πρώτο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2}$$

Αντικαθιστούμε ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΑΓ = 8 και βρίσκουμε:

$$6^2 + 8^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{12^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$36 + 64 = 2ΑΜ^2 + 72 \Leftrightarrow$$
$$2ΑΜ^2 = 28 \Leftrightarrow$$
$$ΑΜ^2 = 14 \Leftrightarrow$$
$$ΑΜ = \sqrt{14}$$

γ. Αν ΑΗ είναι το ύψος του τριγώνου από το Α, τότε η προβολή της διαμέσου ΑΜ στη ΒΓ είναι το τμήμα ΗΜ. Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2ΒΓ \cdot ΗΜ$$

Αντικαθιστούμε ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΑΓ = 8 και βρίσκουμε:

$$8^2 - 6^2 = 2 \cdot 12 \cdot ΗΜ \Leftrightarrow$$
$$64 - 36 = 24 \cdot ΗΜ \Leftrightarrow$$
$$28 = 24 \cdot ΗΜ \Leftrightarrow$$
$$ΗΜ = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$$

Ζήτημα 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες

$$x\hat{O}y \quad y\hat{O}z \quad z\hat{O}x$$

έτσι ώστε:

$$x\hat{O}y = y\hat{O}z = 150^\circ$$

Στις ημιευθείες Οx, Oy, Oz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ=2, ΟΒ=4 και ΟΓ=6.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{ΟΓΑ}$ του τριγώνου ΟΓΑ.

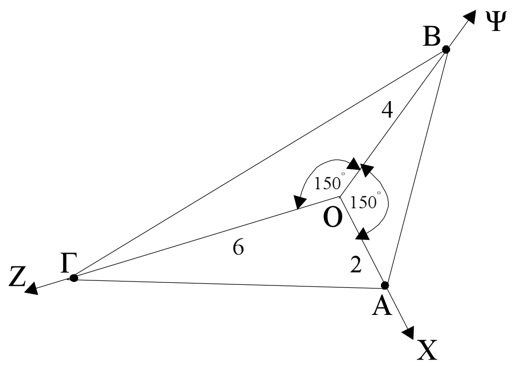
Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών:

$$\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$$

Μονάδες 13

Απάντηση:



Είναι:

$$XOZ = 360^0 - (XO\Psi + \Psi OZ) = 360^0 - (150^0 + 150^0) = 360^0 - 300^0 = 60^0$$

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΑ υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο

$$E_{O\Gamma A} = \frac{1}{2} OA \cdot O\Gamma \cdot ημ(X\hat{O}Z) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot ημ60^0 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

β. Είναι:

$$E_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot ημ(X\hat{O}\Psi) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot ημ150^0 = 4 \cdot ημ(180^0 - 30^0) = 4 \cdot ημ30^0 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$E_{OB\Gamma} = \frac{1}{2} OB \cdot O\Gamma \cdot ημ(\Psi\hat{O}Z) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot ημ150^0 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Άρα

$$\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Δεύτερος τρόπος για το ερώτημα 3β

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 150^0$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{E}_{\mathrm{OAB}}}{\mathrm{E}_{\mathrm{OB\Gamma}}} = \frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{O\Gamma}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O\Gamma}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ζήτημα 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma\mathrm{E} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{R}\,.$$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ=ΓΔ·ΓΕ .

Μονάδες 10

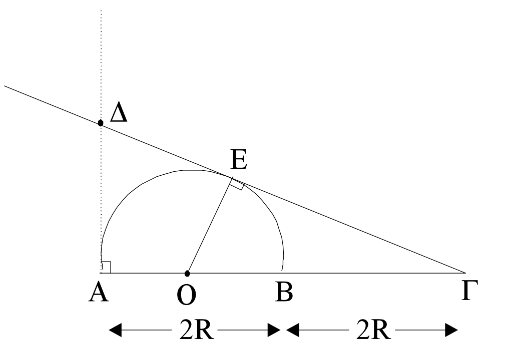
γ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

Απάντηση:



α. Ισχύει ότι:

$$\Gamma\mathrm{E}^2 = \Gamma\mathrm{B}\cdot\Gamma\mathrm{A}$$

Είναι:

$$\Gamma\mathrm{B} = 2\mathrm{R} \quad \text{και} \quad \Gamma\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{B} + \mathrm{BA} = 2\mathrm{R} + 2\mathrm{R} = 4\mathrm{R}$$

Επομένως:

$$\Gamma\mathrm{E}^2 = 2\mathrm{R}\cdot 4\mathrm{R} = 8\mathrm{R}^2$$

Άρα:

$$\Gamma\mathrm{E} = \sqrt{8\mathrm{R}^2} = \mathrm{R}\sqrt{8} = 2\mathrm{R}\sqrt{2}$$

β. Επειδή οι ΓΕ και ΑΔ εφάπτονται του ημικυκλίου συνεπάγεται ότι:

$$ΟΕ \perp ΓΔ \quad \text{και} \quad ΑΔ \perp ΑΓ$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΕΓ και ΓΑΔ είναι ορθογώνια στο Ε και Α αντιστοίχως. Ακόμα, έχουν κοινή την γωνία Γ, επομένως είναι όμοια. Δηλαδή:

$$Ε\overset{\Delta}{Γ}Ο \approx Α\overset{\Delta}{Γ}Δ$$

οπότε:

$$\frac{ΑΓ}{ΕΓ} = \frac{ΓΔ}{ΓΟ}$$

Άρα:

$$ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$$

γ. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΟΓ έχουμε:

$$ΓΕ^2 = ΟΓ^2 - ΕΟ^2 = (3R)^2 - R^2 =$$
$$= 9R^2 - R^2 = 8R^2$$

Άρα:

$$ΓΕ = 2R\sqrt{2}$$

Σύμφωνα με το συμπέρασμα του προηγουμένου ερωτήματος (β) έχουμε:

$$ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$$

και με αντικατάσταση των:

$$ΓΑ = 4R,\ ΓΟ = 3R \text{ και } ΓΕ = 2R\sqrt{2}$$

βρίσκουμε:

$$4R \cdot 3R = ΓΔ \cdot 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$ΓΔ = \frac{12R^2}{2R\sqrt{2}} \Leftrightarrow ΓΔ = \frac{6R}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}R$$

δ. Το ζητούμενο άθροισμα Ε των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ ισούται με την διαφορά του εμβαδού του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ από το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ. Έτσι έχουμε:

$$Ε = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΑΔ - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2$$

Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$ΑΔ^2 = ΔΓ^2 - ΑΓ^2 = \left(3\sqrt{2}R\right)^2 - (4R)^2 =$$
$$= 18R^2 - 16R^2 = 2R^2$$

Άρα:

$$ΑΔ = R\sqrt{2}$$

Επομένως:

$$Ε = \frac{1}{2} \cdot 4R \cdot R\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2R}{2}\right)^2 =$$
$$= 2R^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi R^2 = \left(2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right)R^2$$

Δεύτερος τρόπος για τα ερωτήματα 4β, 4γ και 4δ

Τα τμήματα ΔΑ και ΔΕ είναι ίσα επειδή τα ΔΕ και ΔΑ είναι εφαπτόμενα του κύκλου. Έτσι αν θέσουμε $ΔΑ = ΔΕ = x$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$ΔΓ^2 = ΑΔ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow (ΔΕ + ΕΓ)^2 = ΑΔ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow$$
$$(x + 2\sqrt{2}\,R)^2 = x^2 + (4R)^2 \Leftrightarrow x^2 + 8R^2 + 4\sqrt{2}\,xR = x^2 + 16R^2 \Leftrightarrow$$
$$4\sqrt{2}\,xR = 8R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}$$

Έτσι:

4β.

- $ΓΑ \cdot ΓΟ = 4R \cdot 3R = 12R^2$
- $ΓΔ \cdot ΓΕ = (ΓΕ + ΕΔ)\,ΓΕ = (2\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R) \cdot 2\sqrt{2}\,R =$
  $= 3\sqrt{2}\,R \cdot 2\sqrt{2}\,R = 12R^2$

Άρα:

$$ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$$

4γ.

$$ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ = 2\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R = 3\sqrt{2}\,R$$

4δ Το ζητούμενο άθροισμα Ε των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ ισούται με την διαφορά του εμβαδού του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ από το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ. Έτσι έχουμε:

$$Ε = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΑΔ - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4R \cdot R\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi R^2 =$$
$$= 2R^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi R^2 = R^2\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi\right)$$