Μαθηματικά
Θετικής Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Α.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.

Μονάδες 4

Α.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha,\beta) < (\beta,\upsilon)$
β. $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$
γ. $(\alpha,\beta) > (\beta,\upsilon)$
δ. $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) + 1$

όπου (α,β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β.

Μονάδες 4,5

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $7 \mid (\alpha+5)$ και $7 \mid (40-\beta)$ τότε:

α. $7 \mid (\alpha+\beta)$,
β. $7 \mid (\alpha+\beta+1)$,
γ. $7 \mid (\alpha+\beta+2)$,
δ. $7 \mid (\alpha+\beta-3)$.

Μονάδες 4

Β.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

Β.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

Απάντηση:

Α1.

α. Επειδή $\alpha \mid \beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος ώστε $\beta=\kappa\alpha$, οπότε
$\lambda\beta=\lambda\kappa\alpha$ και άρα: $\alpha \mid \lambda\beta$

β. Επειδή $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ τέτοιοι ώστε
$\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\alpha$. Οπότε:
$\beta + \gamma = \kappa\alpha + \lambda\alpha$ ή
$(\beta + \gamma) = (\kappa + \lambda)\alpha$
Άρα: $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

Α2. Απάντηση: **β**

Β1. Είναι:

$$\left.\begin{matrix} 7 \mid (\alpha+5) \\ 7 \mid (40-\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \mid \left(\alpha+5-(40-\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 7 \mid \alpha+\beta-35 \\ \text{Όμως}: 7 \mid 35 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \mid \alpha+\beta$$

οπότε: Απάντηση: **α**

Β2. (72,112) = (8 • 9, 8 • 14) = 8(9, 14) = 8 • 1=8

Β3. 112 = 72 • 1 +40 ⇔ 40 = 112 - 72 • 1
72 = 40 • 1 + 32 ⇔ 32 = 72 - 40 • 1
40 = 1 • 32 + 8 ⇔ 8 = 40 - 1 • 32
32 = 8 • 4 + 0

Άρα:
8 = 40 - 1 • 32 = 40 - 1(72 - 40 • 1)
= 2 • 40 - 72
= 2(112 - 72) - 72
= -3 • 72 + 2 • 112

Ζήτημα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 5

Απάντηση:

α. Είναι:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}\right) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

β.

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4\cdot 1 + 9\cdot 4 + 12\cdot 1 = 52$$

Άρα: $|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 + 4\cdot 4 - 4 = 17 - 4 = 13$$

Άρα: $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

γ.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$$
$$= 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2\cdot 1 - 1 - 6\cdot 4 = 1 - 24 = -23$$

δ.

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$$

Ζήτημα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο Μ(κ,λ) με κ>0 και λ>0 τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (3,κ) να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ = (-16, 4λ) να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο, άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Μ.

Μονάδες 5

Απάντηση:

α.

$x^2-y^2+6x+9 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+6x+9-y^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+3)^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+3+y)(x+3-y) = 0$

$\Leftrightarrow$ (ε_1): $y = -x - 3$ ή (ε_2): $y = x + 3$

β. $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$, $\lambda_{\varepsilon_2} = 1$

Οπότε: $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2} = -1$

Άρα: $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$

γ. Είναι:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} = (3,\kappa) \parallel (\varepsilon_1) \\ \vec{\beta} = (\text{-}16, 4\lambda\text{-} \parallel (\varepsilon_2)) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \vec{a} = (3,\kappa) \parallel (\varepsilon_2) \\ \vec{\beta} = (\text{-}16, 4\lambda\text{-} \parallel (\varepsilon_1)) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\kappa}{3} = -1 \\ \dfrac{4\lambda}{-16} = 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\kappa}{3} = 1 \\ \dfrac{4\lambda}{-16} = -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa = \text{-}3 \\ \lambda = \text{-}4 \\ \text{απορρ.} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 4 \\ \text{δεκτές} \end{pmatrix}$$

Άρα: M(3,4)

δ. Η εξίσωση της παραβολής είναι: $\psi^2 = 2\rho x$

Επειδή το σημείο M(3,4) ανήκει σ'αυτή, έχουμε:

$$16 = 2 \cdot \rho \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{16}{6} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

Άρα:

$$\psi^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} x \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{16}{3} x$$

Ζήτημα 4ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 7

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Α. $x^2 + \psi^2 + 6\mu x + 8\lambda\psi = 0$ ή

$(x^2 + 6\mu x) + (\psi^2 + 8\lambda\mu) = 0$ ή

$(x^2 + 2 \cdot 3\mu \cdot x + 9\mu^2 - 9\mu^2) + (\psi^2 + 2 \cdot 4\lambda \cdot \psi + 16\lambda^2 - 16\lambda^2) = 0$ ή

$(x + 3\mu)^2 - 9\mu^2 + (\psi + 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0$ ή

$(x + 3\mu)^2 + (\psi + 4\lambda)^2 = 9\mu^2 + 16\lambda^2$.

Επειδή $9\mu^2 + 16\lambda^2 > 0$ για κάθε λ, $\mu \in R^*$ προκύπτει ότι είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(-3μ, -4λ) και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2} .$$

Προφανώς οι συντεταγμένες του Ο(0,0) επαληθεύουν τη δοσμένη εξίσωση.

Β.

α. Έχουμε Κ(-3μ, -4λ) το κέντρο του κύκλου. Θέτουμε

- $-3\mu = x \Leftrightarrow \mu = -(x/3)$ και
- $-4\lambda = \psi \Leftrightarrow \lambda = -(\psi/4)$

και αντικαθιστούμε στην $3\mu + 2\lambda = 0$. Τότε έχουμε:

$$3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{\psi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-x - \frac{\psi}{2} = 0 \Leftrightarrow \psi = -2x .$$

Άρα έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $\psi = -2x$.

β. (Α' ΛΥΣΗ)

Επειδή

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

Επειδή τα Ο, Α και Β είναι σημεία του κύκλου, προκύπτει λόγω της (1) ότι η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως η ευθεία (ε) με εξίσωσηx $+ \psi + 2 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του Κ(-3μ, -4λ).

Οπότε $-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$ (2)

Όμως έχουμε $3\mu + 2\lambda = 0$ (3)

Από το σύστημα των εξισώσεων (2), και (3), βρίσκουμε:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

β. (Β' ΛΥΣΗ)

Έστω ότι είναι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των Α, Β. Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + (-x-2)^2 + 6\mu x + 8\lambda(-x-2) = 0 \\ y = -x-2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + (4 + 6\mu - 8\lambda)x + (4 - 16\lambda) = 0 \\ y = -x-2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + (2 + 3\mu - 8\lambda)x + (2 - 8\lambda) = 0 \quad (1) \\ y = -x-2 \end{aligned}\right\}$$

Επειδή $3\mu + 2\lambda = 0$ η (1) γράφεται

$$X^2 + 2(1 - 3\lambda)x + (2 - 8\lambda) = 0.$$

Έτσι είναι $x_1 + x_2 = 2(3\lambda - 1)$ και $x_1 x_2 = 2 - 8\lambda$. (2)

Η σχέση τώρα $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ γράφεται

$$x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (-x_1 - 2)(-x_2 - 2) = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$2 - 8\lambda + 2(3\lambda - 1) + 2 = 0$$

άρα $\lambda = 1$ και $\mu = -2/3$.

γ. (Α' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές:

$\lambda = 1$ και $\mu = -\frac{2}{3}$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Οπότε:

$$(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$E = \frac{1}{2}(AB)\cdot d(O,AB) = \frac{1}{2}4\sqrt{5}\cdot\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}4\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}\ \text{τ.μονάδες}$$

γ. (Β' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές

λ = 1, $\mu = -\frac{2}{3}$

Είναι $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1x_2 = -6$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$(OAB) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|x_1y_2 - x_2y_1| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\ x_1(-x_1-2) - x_2(-x_1-2)\ \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| -x_1x_2 - 2x_1 + x_1x_2 + 2x_1 \right| =$$

$$= |\ x_1 - x_2\ | = \sqrt{(x_2-x_1)^2} =$$

$$= \sqrt{x_1{}^2 x_2{}^2 - 2x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{x_1{}^2 x_2{}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ \ \text{τ.μ.}$$

γ. (Γ' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές λ = 1, μ = -2/3, η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + \psi^2 - 4x + 8\psi = 0$$

Οι συντεταγμένες των Α, Β προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 8\psi = 0 \\ x + \psi + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Προκύπτει:

$$(x_1, \psi_1) = (2-\sqrt{10}, -4+\sqrt{10})$$
$$(x_2, \psi_2) = (2+\sqrt{10}, -4-\sqrt{10})$$

Το εμβαδόν τώρα του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}\right| = \ldots\ldots\ldots = 2\sqrt{10}\ \tau.\mu.$$