# Θέματα Γεωμετρίας
# Γενικής Παιδείας
# Β΄ Λυκείου 2000

## Ζήτημα 1ο

Α.1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

(Μονάδες 10)

Α.2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ να συμπληρώσετε τη σχέση:

$$ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

(Μονάδες 2,5)

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Β1 και Β2.

Β1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$.
Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7
Β. 4
Γ. 10
Δ. 9
Ε. 11

(Μονάδες 6,5)

Β2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος. Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α είναι ίση με:

Α. 4
Β. 8
Γ. 8/3
Δ. 5
Ε. 3

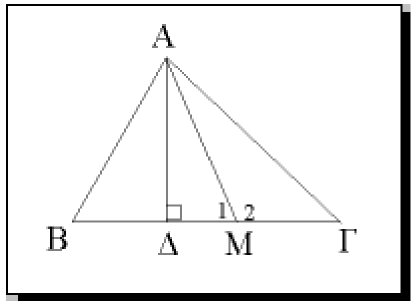
(Μονάδες 6)

**Απάντηση:**

Α.1.
α) Έστω ΑΒ < ΑΓ και ΑΜ διάμεσος. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν: ΑΜ κοινή, ΒΜ = ΜΓ και ΑΒ < ΑΓ, άρα:

$$\widehat{M}_1 < \widehat{M}_2$$

(αφού έχουν δύο πλευρές ίσες και τις τρίτες πλευρές άνισες, οι απέναντι γωνίες είναι ομοίως άνισες).




Όμως,

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^o$$

άρα:

$$\widehat{M}_1 < 90^o \quad \text{και} \quad \widehat{M}_2 > 90^o$$

Εφαρμόζουμε στο τρίγωνο ΑΒΜ την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για οξεία γωνία $(\widehat{M}_1 < 90^o)$ και έχουμε:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2BM \bullet \Delta M \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε στο τρίγωνο ΑΜΓ την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για αμβλεία γωνία $(\widehat{M}_2 > 90^o)$ και έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AM^2 + \Gamma M^2 + 2\Gamma M \bullet \Delta M \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + BM^2 + M\Gamma^2 - 2BM \bullet \Delta M + 2\Gamma M \bullet \Delta M =$$

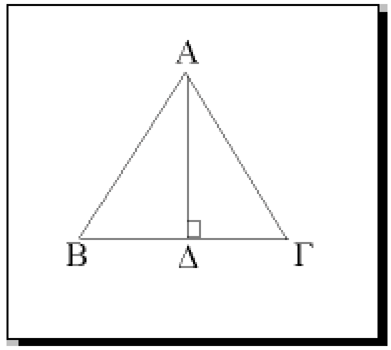
$$= 2AM^2 + \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 - 2BM \cdot \Delta M + 2BM \cdot \Delta M =$$

$$= 2AM^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 2AM^2 + 2\frac{B\Gamma^2}{4} = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Επομένως:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

β) Έστω ΑΒ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος. Αφού ΑΔ διάμεσος, τότε ΒΔ = ΔΓ = ΒΓ/2, κι επειδή ΑΔ ύψος, τότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο, απ' όπου με Π.Θ. έχουμε:




$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 2(A\Delta^2 + B\Delta^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2B\Delta^2 \Leftrightarrow$$

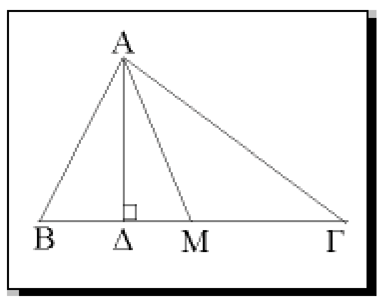
$$\Leftrightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 2A\Delta^2 + 2\frac{B\Gamma^2}{4} = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Επομένως:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

γ) Ομοίως με το (α) αποδεικνύεται αν ΑΒ > ΑΓ

Α.2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, όπου ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσος. Τότε από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων έχουμε:




$$A\Gamma^2 - AB^2 = 2 \bullet B\Gamma \bullet \Delta M.$$

Β.1. Από το θεώρημα των διαμέσων γνωρίζουμε ότι:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

κι επειδή έχουμε $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$, βρίσκουμε:

$$8^2 + 6^2 = 2 \bullet 5^2 + \alpha^2/2 \Leftrightarrow 64 + 36 = 2 \bullet 25 + \alpha^2/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 = 50 + \alpha^2/2 \Leftrightarrow \alpha^2/2 = 50 \Leftrightarrow \alpha^2 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10,$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η Γ.

Β.2. Από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων, κι επειδή $\beta > \gamma$, $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, βρίσκουμε:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2 \bullet \alpha \bullet \Delta M \Leftrightarrow 7^2 - 5^2 = 2 \bullet 4 \bullet \Delta M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 - 25 = 8 \bullet \Delta M \Leftrightarrow 24 = 8 \bullet \Delta M \Leftrightarrow \Delta M = 3,$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η Ε.

**Ζήτημα 2ο**

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ μα ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ και ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5.
Να υπολογίσετε:

α) Την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ.

(Μονάδες 9)

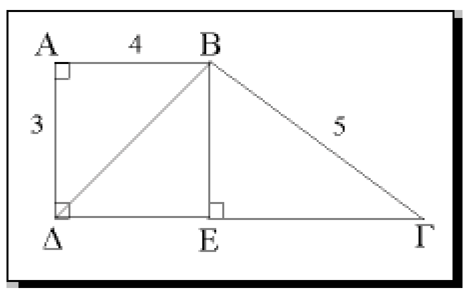
β) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

(Μονάδες 7)

**Απάντηση:**




α) Φέρνουμε το ύψος ΒΕ, οπότε η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ είναι το τμήμα ΓΕ.
Επειδή το ΒΕ είναι ύψος (όπως και το ΑΔ), θα ισχύει: ΒΕ = ΑΔ = 3. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ και βρίσκουμε ότι:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = B\Gamma^2 - BE^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = 16 \Leftrightarrow E\Gamma = 4.$$

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει μικρή βάση ΑΒ = 4, μεγάλη βάση ΓΔ = ΔΕ + ΕΓ = 8 και ύψος ΑΔ = 3, άρα:

$$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Delta = \frac{4+8}{2} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

$E_{AB\Gamma\Delta} = 18$ τετρ. μονάδες.

γ) Το τρίγωνο ΔΒΓ έχει βάση ΓΔ = 8 και ύψος ΒΕ = 3, οπότε:

$$E_{ΒΓΔ} = \frac{ΓΔ \cdot ΒΕ}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

Άρα: $E_{ΒΓΔ}$ = 12 τετρ. μονάδες.

**Ζήτημα 3ο**

Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 15. Να υπολογίσετε:

α) Την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 6)

β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O,R).

(Μονάδες 6)

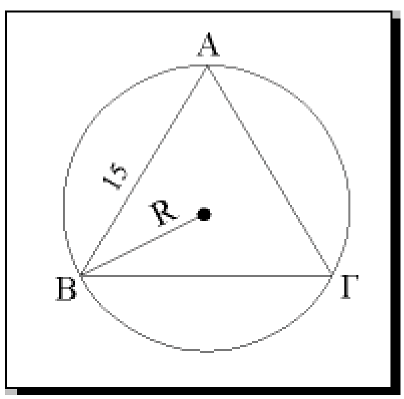
γ) Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 7)

**Απάντηση:**




α) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$λ_3 = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{λ_3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow R = \frac{λ_3}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{15}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 5\sqrt{3} \text{ μονάδες.}$$

β) $E_{(O,R)} = πR^2 \Leftrightarrow E_{(O,R)} = π\left(5\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow E_{(O,R)} = π \cdot 25 \cdot 3 \Leftrightarrow$.

$\Leftrightarrow E_{(0,R)}$ = 75π τετρ. μονάδες.

γ) Γνωρίζουμε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α έχει εμβαδόν:

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Οπότε για α = ΑΒ = 15, βρίσκουμε ότι:

$$E_{ABB} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E_{ABB} = \frac{225\sqrt{3}}{4}\,\text{τετρ.μονάδες}$$

δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο είναι:

$$E = 75\pi - \frac{225\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E = \frac{300 - 225\sqrt{3}}{4}\,\text{τετρ.μονάδες.}$$

**Ζήτημα 4ο**

Δίνεται κύκλος (O,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρνουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ = ΟΔ και φέρνουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $MΔ^2 = AΔ \bullet ΔB$.

(Μονάδες 6)

β) $MΓ \bullet ΓE = MΔ \bullet ΔZ = R^2 - OΔ^2$.

(Μονάδες 6)

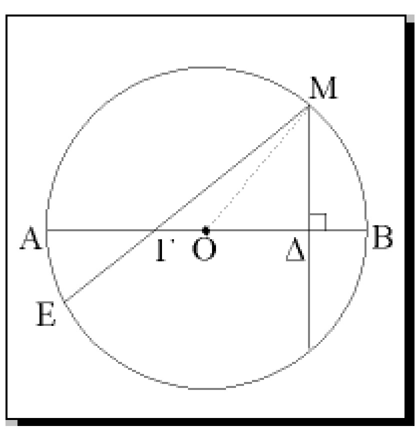
γ) $MΓ^2 + MΔ^2 = 2(R^2 + OΔ^2)$.

(Μονάδες 5)

δ) $\frac{MΓ}{ΓE} + \frac{MΔ}{ΔZ} = \frac{2(R^2 + OΔ^2)}{R^2 - OΔ^2}$

(Μονάδες 8)

**Απάντηση:**



α) Για τη χορδή ΜΖ το ΟΔ είναι απόστημα, άρα το Δ είναι το μέσο της χορδής ΜΖ και το Β είναι το μέσο του τόξου ΜΖ.
Επίσης, οι ΜΖ, ΑΒ είναι χορδές του κύκλου (Ο, R) που τέμνονται στο Δ, επομένως:

$$ΑΔ \bullet ΔΒ = ΜΔ \bullet ΔΖ \Leftrightarrow ΑΔ \bullet ΔΒ = ΜΔ \bullet ΜΔ \Leftrightarrow ΑΔ \bullet ΔΒ = ΜΔ^2.$$

β) Το ΜΕ είναι χορδή του κύκλου και το Γ σημείο της χορδής ΜΕ (εσωτερικό του κύκλου), άρα:

$$ΜΓ \bullet ΓΕ = R^2 - ΟΓ^2.$$

Ομοίως το ΜΖ είναι χορδή του κύκλου και το Δ σημείο της χορδής ΜΖ (εσωτερικό του κύκλου), άρα:

$$ΜΔ \bullet ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2.$$

Συνεπώς: $ΜΓ \bullet ΓΕ = ΜΔ \bullet ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2$.

γ) Στο τρίγωνο ΜΓΔ το ΜΟ είναι διάμεσος οπότε από το 1$^ο$ θεώρημα των διαμέσων βρίσκουμε ότι:

$$ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2ΜΟ^2 + (1/2\ ΓΔ^2) \Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 1/2\ (2ΟΔ)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 1/2 \bullet (4ΟΔ^2) \Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 2ΟΔ^2.$$

δ) Επειδή ΜΔ = ΔΖ, $ΜΔ \bullet ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2$ και $ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 2ΟΔ^2$, η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμαι:

$$\frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΔΖ} = \frac{2(R^2 + ΟΔ^2)}{R^2 - ΟΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΜΔ} = \frac{ΜΔ^2 + ΜΓ^2}{ΜΔ \cdot ΔΖ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΜΕ} + 1 = \frac{ΜΔ^2 + ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + 1 = \frac{ΜΔ^2}{ΜΔ^2} + \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + 1 = 1 + \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} = \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ΓΕ} = \frac{ΜΓ}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow ΜΔ^2 = ΜΓ \cdot ΓΕ \Leftrightarrow ΜΔ \cdot ΔΖ = ΜΓ \cdot ΓΕ$$

Η τελευταία σχέση ισχύει λόγω του 2ου ερωτήματος.