Θέματα Άλγεβρας
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

Α.1. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) που έχει πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

(Μονάδες 3)

Α.2. Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ, έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

Α.3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι:

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

(Μονάδες 6,5)

Β.1. Στη στήλη Α δίνεται ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη στήλη Β ο νιοστός όρος α_ν τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\alpha_1 = 1, \quad \omega = -2$	1. $\alpha_\nu = -\nu$
β. $\alpha_1 = 0, \quad \omega = 3$	2. $\alpha_\nu = 4\nu - 3$
γ. $\alpha_1 = -1, \omega = -1$	3. $\alpha_\nu = 3 - 2\nu$
	4. $\alpha_\nu = 3\nu - 3$

(Μονάδες 6)

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί −5, 5, 15, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4 … είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) για τους όρους της α_2, α_4, α_6 ισχύει η σχέση $2\alpha_4, = \alpha_2 + \alpha_6$.

(Μονάδες 4,5)

Β.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με:

Α. $\frac{2^{\nu}-1}{2}$.
Β. $2^{\nu} - 1$.
Γ. $2^{\nu-1}$.
Δ. $1 - 2^{\nu}$.
Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

(Μονάδες 2)

Απάντηση:

Α.1.Ο τύπος που δίνει τον νιοστό όρο μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Α.2. Η σχέση που συνδέει τρεις διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = (\alpha+\gamma)/2$$

Α.3. Έστω α_1, α_2, α_3, … , α_ν οι ν πρώτοι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Τότε το άθροισμα τους S_ν θα είναι:

$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \qquad (1)$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί λ και έχουμε:

$\lambda \bullet S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^\nu \qquad (2)$

Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (1) και έχουμε:

$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1 \lambda^\nu - \alpha_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)/(\lambda - 1)$, αφού $\lambda \neq 1$.

Β.1. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Αντικαθιστούμε σ’ αυτόν τις τιμές των α_1 και ω της στήλης Α και βρίσκουμε:

α.Αν $\alpha_1 = 1$ και $\omega = -2$ τότε:

$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1) \bullet (-2) \Leftrightarrow \alpha_\nu = -2\nu + 3.$

β. Αν $\alpha_1 = 0$ και $\omega = 3$ τότε:

$\alpha_\nu = 0 + (\nu - 1) \bullet 3 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 3.$

γ. Αν $α_1 = -1$ και $ω = -1$ τότε:

$α_ν = -1 + (ν - 1) \bullet (-1) \Leftrightarrow α_ν = -ν$.

Επομένως:

α ↔ 3, β ↔ 4, γ ↔ 1

Β.2.

α. Έχουμε $α = -5$, $β = 5$, $γ = 15$.

Για να είναι οι αριθμοί α, β και γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει:

$2β = γ + α \Leftrightarrow 2 \bullet 5 = 15 + (-5)$,

που ισχύει. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

β. Η αριθμητική πρόοδος έχει $α_1 = 10$, $ω = -3$, οπότε:

$α_{20} = α_1 + (20 - 1)ω = 10 + 19 \bullet (-3) \Leftrightarrow α_{20} = -47$,

άρα η πρόταση είναι **λάθος**.

γ. Αφού έχουμε αριθμητική πρόοδο, θα ισχύει:

$α_4 = α_1 + 3ω$, $α_2 = α_1 + ω$, $α_6 = α_1 + 5ω$.

Τότε: $2α_4 = α_2 + α_6 \Leftrightarrow 2(α_1 + 3ω) = α_1 + ω + α_1 + 5ω$,

που ισχύει, άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

Επομένως:

α ↔ Σ, β ↔ Λ, γ ↔ Σ

Β.3. Έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $α_1 = 1$ και $λ = 2$, οπότε:

$$S_ν = α_1 \frac{λ^ν - 1}{λ - 1} = 1 \cdot \frac{2^ν - 1}{2 - 1} = 2^ν - 1$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **Β**.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$P(x) = αx^3 + (β - 1)x^2 - 3x - 2β + 6$

Όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α = 2 και β = 4.

(Μονάδες 15)

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Επειδή ο αριθμός x = 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) θα έχουμε P(1) = 0, κι αφού η διαίρεση του P(x) με το x + 1 αφήνει υπόλοιπο 2, έχουμε: P(-1) = 2. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + (\beta - 1) - 3 - 2\beta + 6 = 0 \\ -\alpha + (\beta - 1) + 3 - 2\beta + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha - \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Για τις τιμές α = 2 και β = 4 το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \quad ή \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad ή \\ x = -2 \quad ή \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα: x = 1 ή x = -2 ή x = -(1/2).

Ζήτημα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x - 4συν^2x$$

όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή f(x) = ρημ(2x + φ) + κ, όπου ρ, φ, κ πραγματικοί αριθμοί και ρ > 0.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι:

$$ημ2x = 2\,ημxσυνx,\;\; ημ^2x=\frac{1-συν2x}{2},\; συν^2x=\frac{1+συν2x}{2}$$

οπότε:

$f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x - 4συν^2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=ημ2x-2\frac{1-συν2x}{2}-4\frac{1+συν2x}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x) = ημ2x - 1 + συν2x - 2 - 2συν2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = ημ2x - συν2x - 3.$

Έστω $g(x) = ημ2x - συν2x$, $x \in R$. Τότε:

$$ρ=\sqrt{α^2+β^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$ημφ=\frac{β}{ρ}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

$$συνφ=\frac{α}{ρ}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$φ=-\frac{\pi}{4}$$

Επομένως:

$$g(x)=\sqrt{2}ημ\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

και

$$f(x)=\sqrt{2}ημ\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3$$

β) Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν το

$$ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right)$$

γίνεται μέγιστο, δηλαδή όταν το ημίτονο είναι ίσο με 1. Επομένως πρέπει:

$$ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right) = ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{π}{4} = 2κπ + \frac{π}{2} \\ 2x - \frac{π}{4} = 2κπ + π - \frac{π}{2} \end{cases} ,με\ κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2κκ + \frac{π}{2} + \frac{π}{4} \quad ,με\ κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = κπ + \frac{3π}{8} \quad ,με\ κ \in Z$$

Τότε η μέγιστη τιμή είναι:

$$f\left(κπ + \frac{3π}{8}\right) = \sqrt{2} \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow f\left(κπ + \frac{3π}{8}\right) = \sqrt{2} - 3 \quad ,με\ κ \in Z$$

γ) $f(x) - f\left(x + \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right) - 3 - \sqrt{2}ημ\left[2\left(x + \frac{π}{4}\right) - \frac{π}{4}\right] + 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right) - \sqrt{2}ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημ\left(2x - \frac{π}{4}\right) - ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημ2x \cdot συν\frac{π}{4} - ημ\frac{π}{4} \cdot συν2x - ημ2x \cdot συν\frac{π}{4} - ημ\frac{π}{4} \cdot συν2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - ημ\frac{π}{4} \cdot συν2x - ημ\frac{π}{4} \cdot συν2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot συν2x = 1 \Leftrightarrow συν2x = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ \kappa \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{3\pi}{8}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ \kappa \in Z$$

Όμως, x $\in$ [0, π] δηλαδή 0 $\leq$ x $\leq$π. Επομένως:

- Αν

$$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8}:$$

$$0 \leq \kappa\pi + \frac{3\pi}{8} \leq \pi, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq \kappa\pi \leq \frac{5\pi}{8}, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{5}{8}, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z$$

άρα κ = 0 και

$$x = \frac{3\pi}{8}$$

- Αν

$$x = \kappa\pi - \frac{3\pi}{8}:$$

$$0 \leq \kappa\pi - \frac{3\pi}{8} \leq \pi, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z \Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{8}, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{11}{8}, \mu\varepsilon \ \kappa \in Z$$

άρα κ = 1 και

$$x = \frac{5\pi}{8}$$

Ζήτημα 4ο

Ένας αριθμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

(Μονάδες 9)

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \bullet 10$ βακτηριδίων ανά ώρα.

1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

(Μονάδες 8)

2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

Α. Επειδή ο πληθυσμός των βακτηριδίων τριπλασιάζεται κάθε ώρα, σημείνει ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = 3$.
Επειδή αρχικά έχουμε 10 βακτηρίδια, στο τέλος της πρώτης ώρας θα υπάρχουν 30 βακτηρίδια, άρα
$\alpha_1 = 30$. Επομένως:

$\alpha_\nu = \alpha_1 \bullet \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 30 \bullet 3^{\nu-1}$

και:

$\alpha_6 = 30 \bullet 3^{6-1} = 30 \bullet 3^5 = 30 \bullet 243 \Leftrightarrow \alpha_6 = 7.290$ βακτηρίδια.

Β.1. Επειδή με τον ψεκασμό καταστρέφονται $3^3 \bullet 10$ βακτηρίδια, σε 20 ώρες θα έχουν καταστραφεί:

$3^3 \bullet 10 \bullet 20 = 27 \bullet 200 = 5.400$ βακτηρίδια.

Άρα απομένουν:

$7.290 - 5.400 = 1.890$ βακτηρίδια.

Β.2. Έστω ότι τα βακτηρίδια καταστρέφονται μετά από t ώρες. Τότε θα πρέπει:

$t \bullet 3^3 \bullet 10 = 7.290 \Leftrightarrow 270t = 7.290 \Leftrightarrow t = 7.290/270 \Leftrightarrow t = 27$ ώρες

Επομένως όλα τα βακτηρίδια θα έχουν καταστραφεί μετά από 27 ώρες.