

**Θέματα Μαθηματικών  
Θετικής Κατεύθυνσης  
Β' Λυκείου 2000**

**Ζήτημα 1ο**

A.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ .

(Μονάδες 2)

A.2. Πότε η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

(Μονάδες 4,5)

A.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\epsilon$  του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

(Μονάδες 6)

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνεται κύκλος  $x^2 + y^2 = 10$  και το σημείο του  $M(1, -3)$ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $M$  έχει εξίσωση:

A.  $x + 3y = 10$

B.  $5x - y = 8$

Γ.  $x - 3y = 10$

Δ.  $3x + 2y = 3$

E.  $(1/2)x + y = 5$

(Μονάδες 4)

B.2. Στη στήλη A δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη στήλη B τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη A	Στήλη B
<b>α.</b> $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	<b>1.</b> $K(0, -1), \rho = 2$
<b>β.</b> $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	<b>2.</b> $K(3, -2), \rho = 1$
	<b>3.</b> $K(3, -2), \rho = 4$

(Μονάδες 4)

B.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο  $(1,-1)$  ανήκει στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$ .

β. Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η ευθεία  $y = 2x$  εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$  όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

(Μονάδες 4,5)

### Απάντηση:

A.1. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

A.2. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο όταν  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ . Το κέντρο του τότε είναι το:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα του:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

A.3.

α) Επειδή το  $A(x_1, y_1)$  είναι σημείο του κύκλου, θα ισχύει ότι:

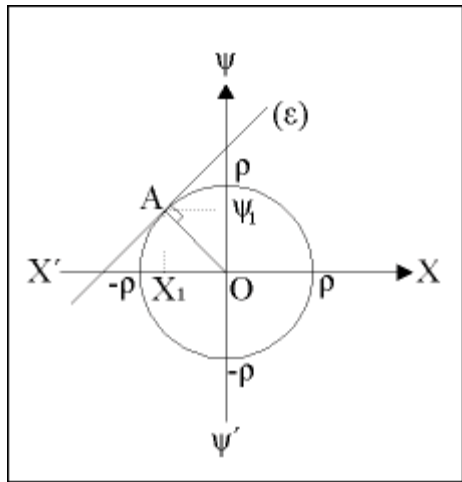
$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \quad (1)$$

Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ . Τότε:

$$(\varepsilon) \perp \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\overrightarrow{OA}} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{y_1}{x_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{y_1}{x_1}$$

για κάθε  $x_1, y_1 \neq 0$ .



Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο A, θα έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = \lambda_\epsilon \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = - (x_1/y_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} yy_1 + xx_1 = \rho^2$$

β) Αν  $x_1 = 0$ , τότε  $A(0,\rho)$  ή  $A(0,-\rho)$  οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y = \rho \text{ ή } y = -\rho \Leftrightarrow y \cdot \rho = \rho^2 \text{ ή } y \cdot (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow yy_1 = \rho^2 \text{ ή } yy_1 = \rho^2 \\ \Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = \rho^2$$

αφού  $x_1 = 0$ .

γ) Αν  $y_1 = 0$ , τότε  $A(\rho,0)$  ή  $A(-\rho,0)$  οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$x = \rho \text{ ή } x = -\rho \Leftrightarrow x \cdot \rho = \rho^2 \text{ ή } x \cdot (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow x \cdot x_1 = \rho^2 \text{ ή } x \cdot x_1 = \rho^2 \\ \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

αφού  $y_1 = 0$ .

B.1. Αφού το σημείο  $M(1,-3)$  επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου  $x^2 + y^2 = 10$ , η εφαπτομένη στο M θα έχει εξίσωση:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot (-3) = 10 \Leftrightarrow x - 3y = 10$$

επομένως σωστή είναι η απάντηση Γ.

B.2.

α. Ο κύκλος με εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  έχει  $A = -6$ ,  $B = 4$ ,  $\Gamma = -3$ , άρα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

δηλαδή  $K(3,-2)$  και ακτίνα:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

β. Ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + (y + 1)^2 = 4$  έχει κέντρο  $K(0,-1)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ .

Επομένως έχουμε:

$$\alpha \leftrightarrow 3 \text{ και } \beta \leftrightarrow 1$$

B.3.

α. Το σημείο  $(1,-1)$  είναι σημείο του κύκλου  $x^2 + y^2 = 2$ , αφού  $1^2 + (-1)^2 = 2$ .

β. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4}{5} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Επειδή έχουμε δύο λύσεις, ο κύκλος και η ευθεία τέμνονται.

γ. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$  γράφεται ισοδύναμα:  $x^2 + y^2 = -\lambda^2 < 0$   
Επομένως δεν είναι εξίσωση κύκλου.

Άρα:

$$\alpha \Leftrightarrow \Sigma \quad \beta \Leftrightarrow \Lambda \quad \gamma \Leftrightarrow \Lambda.$$

### **Ζήτημα 2ο**

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής  $a = 6\kappa + \upsilon$ , με  $0 \leq \upsilon \leq 6$  και  $\kappa$  ακέραιος.  
Να δείξετε ότι:

α. Οι παραπάνω ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή

$a = 6\kappa + 1$  ή τη μορφή  $a = 6\kappa + 5$ , όπου  $\kappa$  ακέραιος.

(Μονάδες 10)

β. Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή:  $a^2 = 3\mu + 1$ , όπου  $\mu$  ακέραιος.

(Μονάδες 10)

γ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Μονάδες 5)

### **Απάντηση:**

α. Αφού  $a = 6\kappa + \upsilon$  με  $0 \leq \upsilon < 6$ , έχουμε ότι:

Αν  $\upsilon = 0$ ,  $a = 6\kappa = 2(3\kappa) = \text{πολ}2$ , απορρίπτεται.

Αν  $\upsilon = 1$ ,  $a = 6\kappa + 1$ .

Αν  $\upsilon = 2$ ,  $a = 6\kappa + 2 = 2(3\kappa + 1) = \text{πολ}2$ , απορρίπτεται.

Αν  $\upsilon = 3$ ,  $a = 6\kappa + 3 = 3(2\kappa + 1) = \text{πολ}3$ , απορρίπτεται.

Αν  $\upsilon = 4$ ,  $a = 6\kappa + 4 = 2(3\kappa + 2) = \text{πολ}2$ , απορρίπτεται.

Αν  $\upsilon = 5$ ,  $a = 6\kappa + 5$ .

Επομένως  $a = 6\kappa + 1$  ή  $a = 6\kappa + 5$ .

β.  $a = 6\kappa + 1 \Leftrightarrow a^2 = (6\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow a^2 = 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow a^2 = 3(12\kappa^2 + 4\kappa) + 1 \Leftrightarrow a^2 = 3\mu + 1, \mu = 12\kappa^2 + 4, \kappa \in \mathbb{Z}.$   
 $a = 6\kappa + 5 \Leftrightarrow a^2 = (6\kappa + 5)^2 \Leftrightarrow a^2 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow a^2 = 3(12\kappa^2 + 20\kappa + 8) + 1 \Leftrightarrow a^2 = 3\mu + 1,$   
 $\mu = (12\kappa^2 + 20\kappa + 8) \kappa \in \mathbb{Z}.$

γ.  $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 5)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 5)(6\kappa + 5 + 6\mu + 5) =$   
 $= 6(\kappa - \mu)(6\kappa + 6\mu + 10) = \text{πολ}3.$   
 $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 1)(6\kappa + 5 + 6\mu + 1) =$   
 $= (6\kappa - 6\mu + 4)(6\kappa + 6\mu + 6) = 6(6\kappa - 6\mu + 4)(\kappa + \mu + 1) = \text{πολ}3$   
 $(6\kappa + 1)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 1 - 6\mu - 1)(6\kappa + 1 + 6\mu + 1) =$   
 $= 6(\kappa - \mu)(6\kappa + 6\mu + 2) = \text{πολ}3.$

### **Ζήτημα 3ο**

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \quad , \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$$

α. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} = (-1, 2)$$

και

$$\vec{\beta} = (2, -2)$$

(Μονάδες 7)

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα:

$$\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

και

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

να είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα:

$$\vec{\gamma} = (3, -1)$$

σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

(Μονάδες 10)

**Απάντηση:**

α). Είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8) \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 3\vec{\alpha} = (-3, 6) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (-1, 2)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} &= (4, -2) \Leftrightarrow 2(-1, 2) + 3\vec{\beta} = (4, -2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\vec{\beta} &= (4, -2) - (-2, 4) \Leftrightarrow 3\vec{\beta} = (6, -6) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (2, -2) \end{aligned}$$

β)  $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2 + 3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 0 \quad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha}^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

$$\vec{\beta}^2 = (2)^2 + (-2)^2 = 8$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -6$$

Τότε η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} 10\kappa - 18\kappa - 12 + 24 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12 &= 8\kappa \Leftrightarrow \kappa = 12/8 \Leftrightarrow \kappa = 3/2. \end{aligned}$$

γ. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\delta}, \vec{\varepsilon}$ , όπου:

$$\vec{\delta} // \vec{\alpha}$$

και

$$\vec{\varepsilon} \perp \vec{\alpha}.$$

Τότε:

$$\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha}, \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \vec{\delta} = (-\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbf{R}$$

και έστω

$$\vec{u} = (2, 1) \perp \vec{\alpha} \quad (\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 0)$$

Τότε θα πρέπει:

$$\vec{u} // \vec{\varepsilon} \Leftrightarrow \vec{\varepsilon} = v \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{\varepsilon} = (2v, v), v \in \mathbf{R}.$$

Ακόμη πρέπει:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} \Leftrightarrow (3, -1) = (-\lambda, 2\lambda) + (2\nu, \nu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -\lambda + 2\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2\lambda + 4\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\nu \\ \lambda = 2\nu - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon}, \text{ αν } \vec{\delta} = (1, -2), \vec{\varepsilon} = (2, 1) \text{ με } \vec{\varepsilon} \perp \vec{\delta}$$

#### **Ζήτημα 4ο**

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .

(Μονάδες 8)

β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2,2)$ ,  $\Lambda(-1,5)$  και  $M(1,3)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία  $K$ ,  $\Lambda$  και  $M$ .

(Μονάδες 4,5)

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία  $K$  και  $\Lambda$  βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο  $M$ .

(Μονάδες 6)

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο  $\Phi$  και τα πλοία  $\Lambda$  και  $M$ .

(Μονάδες 6,5)

#### **Απάντηση:**

α. Ο φάρος ( $\Phi$ ) θα είναι το σταθερό σημείο των ευθειών:

$$(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x - x + \lambda y + y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x + y - 1) + (-x + y - 3) = 0$$

Το σταθερό σημείο (αν υπάρχει) βρίσκεται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Άρα:  $\Phi(-1, 2)$ .

$$\beta. \text{ΚΦ: } y - y_{\Phi} = \lambda_{\text{ΚΦ}}(x - x_{\Phi}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-2}{-1-2}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = 0$$

ΛΦ: Αφού  $x_{\Lambda} = x_{\Phi}$ , τότε η εξίσωση είναι η  $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ .

$$\text{ΜΦ: } y - y_{\Phi} = \lambda_{\text{ΜΦ}}(x - x_{\Phi}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-3}{-1-1}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2y - x - 5 = 0$$

$$\gamma. d(\text{Κ}, \Phi\text{Μ}) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d(\Lambda, \Phi\text{Μ}) = \frac{|2 \cdot 5 - (-1) \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Επειδή  $d(\Lambda, \Phi\text{Μ}) = 2d(\text{Κ}, \Phi\text{Μ})$ , το Κ διέρχεται πιο κοντά στη φωτεινή ακτίνα ΦΜ σε σχέση με το Λ.

δ. Επειδή  $\Phi\Lambda // \gamma\gamma'$  και  $\Phi\text{Μ}$  δεν είναι παράλληλη  $\gamma\gamma'$ , τα  $\Phi, \Lambda, \text{Μ}$  δεν είναι συνευθειακά και ορίζουν το τρίγωνο  $\Phi\Lambda\text{Μ}$ . Τότε:

$$E_{\Phi\Lambda\text{Μ}} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{\Phi\Lambda}, \overrightarrow{\Phi\text{Μ}}) \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 - (-1) & 1 - (-1) \\ 5 - 2 & 3 - 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow E_{\Phi\Lambda\text{Μ}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{\Phi\Lambda\text{Μ}} = 3 \text{ τετρ. μονάδες.}$$