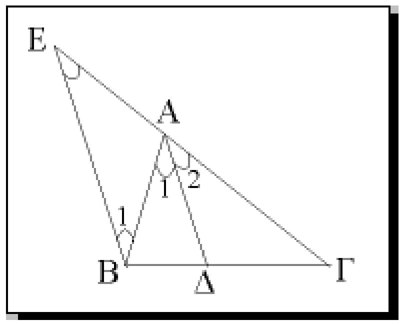
Θέματα Γεωμετρίας
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 1999

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Από το Β φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΔ και έστω Ε το σημείο τομής της με την ευθεία ΑΓ.



α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΒΕ, για τις παράλληλες ευθείες ΑΔ και ΒΕ.

(Μονάδες 5)

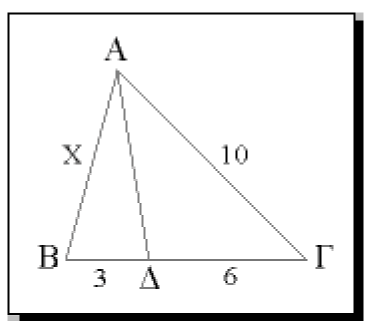
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι ΔΒ/ΔΓ = ΑΒ/ΑΓ.

(Μονάδες 3,5)

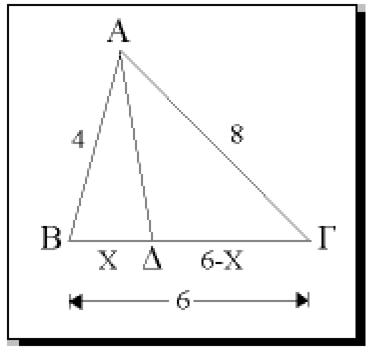
Β. α) Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Αν ΒΔ = 3, ΔΓ = 6 και ΑΓ = 10, τότε η πλευρά ΑΒ είναι ίση με:



Α. 3
Β. 6
Γ. 4
Δ. 5
Ε. 7

(Μονάδες 6,5)

β) Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Αν ΑΒ = 4, ΒΓ = 6 και ΑΓ = 8, τότε:



Α. ΔΒ = 1 και ΔΓ = 5
Β. ΔΒ = 5 και ΔΓ = 1
Γ. ΔΒ = 3 και ΔΓ = 3
Δ. ΔΒ = 2 και ΔΓ = 4
Ε. ΔΒ = 4 και ΔΓ = 2

(Μονάδες 6)

Απάντηση:

Α.1 α) Αφού ΑΔ//ΒΕ με τέμνουσες τις ΓΕ και ΓΒ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή θα έχουμε:

ΑΕ/ΔΒ = ΑΓ/ΔΓ = ΕΓ/ΒΓ (1)

β) Αφού ΕΒ//ΑΔ, έχουμε:

$\widehat{E} = \widehat{A}_2$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, και
$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$, ως εντός εναλλάξ

Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, έχουμε:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

Επομένως,

$$\widehat{E} = \widehat{B}_1$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές και ισχύει:

ΑΕ = ΑΒ (2)

γ) Από τη σχέση (1) έχουμε:

ΑΕ/ΔΒ = ΑΓ/ΔΓ ⇔ ΑΕ/ΑΓ = ΔΒ/ΔΓ

και λόγω της σχέσης (2) έχουμε:

ΑΒ/ΑΓ = ΔΒ/ΔΓ

Α.2

α) Έστω x το μήκος της πλευράς ΑΒ. Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΔΒ/ΔΓ = ΑΒ/ΑΓ \Leftrightarrow 3/6 = x/10 \Leftrightarrow 6x = 30 \Leftrightarrow x = 5$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η Δ.

β) Έστω x το μήκος ΔΒ, οπότε το μήκος ΔΓ θα είναι 6 – x. Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΔΒ/ΔΓ = ΑΒ/ΑΓ \Leftrightarrow x/(6-x) = 4/8 \Leftrightarrow 8x = 24 - 4x \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$$

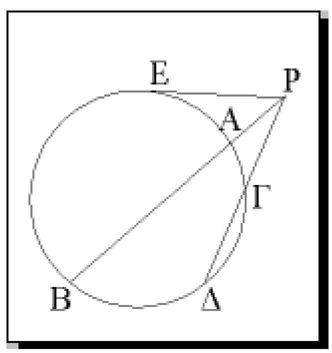
Άρα είναι:

$$ΔΒ = 2 \text{ και } ΔΓ = 6 - 2 = 4$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η Δ.

Ζήτημα 2ο

Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΒ και ΡΔ τέμνουσες αυτού. Αν
ΑΒ = 9, ΡΓ = 4 και ΓΔ = 5, τότε:



α) Να υπολογίσετε το ΡΑ.

(Μονάδες 15)

β) Το ΡΕ είναι ίσο με:

Α. 9 Β. 5 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 6

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Έστω x το μήκος του ΡΑ. Έχουμε:

$$PA \bullet PB = P\Gamma \bullet P\Delta \Leftrightarrow PA(PA + AB) = P\Gamma(P\Gamma + \Gamma\Delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x + 9) = 4(4 + 5) \Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -12 & (\alpha\pi o\rho\rho.) \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα: **PA = 3**

β) Επειδή το PE είναι εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο, ισχύει:

$$PE^2 = PA \bullet PB = P\Gamma \bullet P\Delta$$

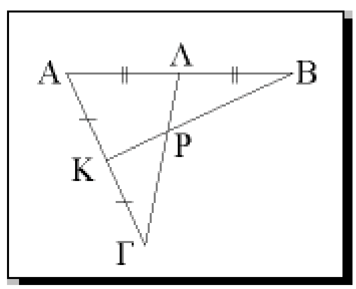
Άρα:

$$PE^2 = P\Gamma \bullet P\Delta \Leftrightarrow PE^2 = 4 \bullet 9 \Leftrightarrow PE^2 = 36 \Leftrightarrow PE = 6$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η Ε.

Ζήτημα 3ο

Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:



α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1.
(Μονάδες 15)

β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.
(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Επειδή το Λ είναι το μέσον του ΑΒ, ισχύει:

$$A\Lambda = \Lambda B = AB/2$$

Επειδή το Κ είναι το μέσον του ΑΓ, ισχύει:

$$AK = K\Gamma = A\Gamma/2$$

Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν κοινή γωνία $\widehat{A}$. Άρα, ισχύει:

$$\frac{(\mathrm{AKB})}{(\mathrm{A\Lambda\Gamma})} = \frac{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Lambda}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\cdot\mathrm{AB}}{\frac{\mathrm{AB}}{2}\cdot\mathrm{A\Gamma}}$$

Άρα:

$$\frac{(\mathrm{AKB})}{(\mathrm{A\Lambda\Gamma})} = 1$$

β) Έχουμε:

$$(\mathrm{B\Lambda P}) = (\mathrm{AKB}) - (\mathrm{AKP\Lambda}) \qquad (1)$$

και

$$(\mathrm{K\Gamma P}) = (\mathrm{A\Lambda\Gamma}) - (\mathrm{AKP\Lambda}) \qquad (2)$$

Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{AKB})}{(\mathrm{A\Lambda\Gamma})} = 1 \Leftrightarrow (\mathrm{AKB}) = (\mathrm{A\Lambda\Gamma}) \qquad (3)$$

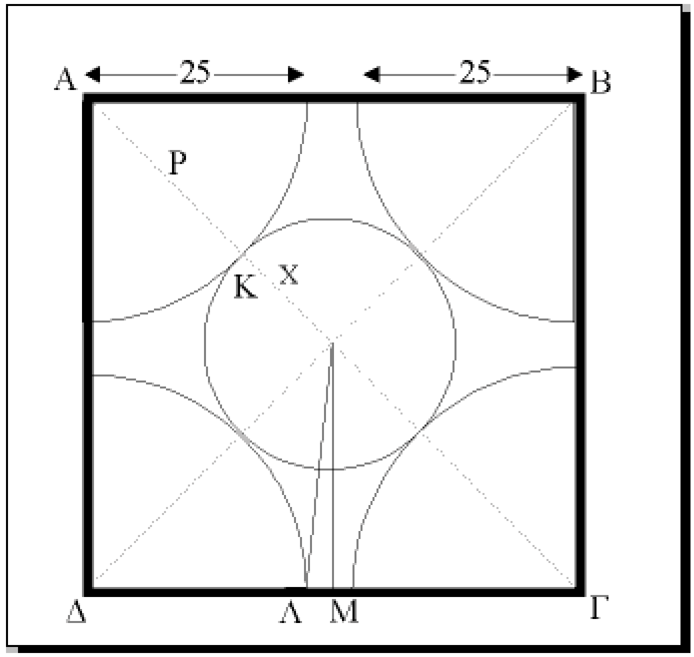
Από τις σχέσεις (1) και (2), λόγω της σχέσης (3), έχουμε:

$$(\mathrm{B\Lambda P}) = (\mathrm{K\Gamma P})$$

Ζήτημα 4ο

α) Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά 40√2 μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του κήπου τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

(Μονάδες 8)



β) Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση (β);

(Μονάδες 5)

δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

(Μονάδες 7)

Απάντηση:

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = 40\sqrt{2} \cong 56$m. Η ακτίνα των κυκλικών περιοχών που ποτίζονται είναι $\rho = 25$m. Επειδή είναι $\rho + \rho = 25 + 25 = 50 < 56$, σημαίνει ότι οι κυκλικοί τομείς δεν τέμνονται. Επομένως, το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται θα βρεθεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τεσσάρων κυκλικών τομέων. Δηλαδή:

$$E_1 = \alpha^2 - 4E_{\kappa.\tau.} = \alpha^2 - 4\frac{\pi\rho^2 \cdot 90}{360} = \alpha^2 - \pi\rho^2 = \left(40\sqrt{2}\right)^2 - \pi \cdot 25^2 = (3200 - 625\pi)\,\mathrm{m}^2$$

β) Ο πέμπτος μηχανισμός πρέπει να ποτίζει έναν κυκλικό δίσκο, ο οποίος έχει ως κέντρο το κέντρο του τετραγώνου και εφάπτεται στους τέσσερις κυκλικούς τομείς. Επομένως, η ζητούμενη ακτίνα είναι:

$$x = AO - AK = \frac{A\Gamma}{2} - \rho = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} - \rho = \frac{40\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} - 25 = 40 - 25 = 15\mathrm{m}$$

γ) Το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση β) είναι:

$$E_2 = E_1 - \pi x^2$$

όπου πx^2 είναι το εμβαδόν του μεσαίου κυκλικού δίσκου. Έχουμε:

$$E_2 = E_1 - \pi x^2 = (3200 - 625\pi) - \pi \bullet 15^2 = 3200 - 625\pi - 225\pi =$$
$$= \mathbf{(3200 - 850\pi)\ m^2}$$

δ) Η ζητούμενη ακτίνα έχει μήκος ΟΛ, όπου Λ είναι το σημείο στο οποίο ένας από τους κυκλικούς τομείς τέμνει την πλευρά ΓΔ του τετραγώνου. Αν Μ το μέσον της πλευράς αυτού του τετραγώνου, ισχύει:

$$ΟΛ^2 = ΟΜ^2 + ΛΜ^2 \qquad (1)$$

Όμως:

$$ΟΜ = \frac{\alpha}{2} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}\mathrm{m}$$

και

$$ΛΜ = \frac{\alpha}{2} - \rho = \frac{\alpha - 2\rho}{2} = \frac{40\sqrt{2} - 50}{2} = \left(20\sqrt{2} - 25\right)\mathrm{m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$ΟΛ = \sqrt{ΟΜ^2 + ΛΜ^2} = \sqrt{\left(20\sqrt{2}\right)^2 + \left(20\sqrt{2} - 25\right)^2} =$$

$$= \sqrt{800 + 800 - 2 \cdot 20\sqrt{2} \cdot 25 + 625} = \sqrt{2225 - 1000\sqrt{2}}\ \mathrm{m}$$