# Θέματα Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου 1999

**Ζήτημα 1ο**

Α. Έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

(Μονάδες 3)

β) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και $\lambda_1$,$\lambda_2$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 5,5)

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{συνθ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(Μονάδες 4)

Β. α) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1),$$
$$\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$$

με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

Α. λ = 1
Β. λ = 3
Γ. λ = 2
Δ. λ = -2
Ε. λ = -3

Να γράψετε στο τετραδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6,5)

β) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$$
$$\vec{v} = (2, 2\sqrt{3}),$$
$$\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

| ΣΤΗΛΗ Α΄ | ΣΤΗΛΗ Β΄ |
|---|---|
| | Α. $\pi/2$ |
| 1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ | Β. $\pi/6$ |
| | Γ. $\pi/4$ |
| 2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$ | Δ. $2\pi/3$ |
| | Ε. $3\pi/4$ |
| 3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$ | Ζ. $\pi/3$ |

Να γράψετε στο τετραδιό σας τον αριθμό της στήλης Α΄και δίπλα το γράμμα της στήλης Β΄που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

**Απάντηση:**

Α. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad , \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

β) Ισχύει:

$$\lambda_1 = y_1/x_1 \text{ και } \lambda_2 = y_2/x_2$$

με $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y . Είναι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

γ) Ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \text{συνθ} \Leftrightarrow \text{συνθ} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \qquad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

και

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$\text{συνθ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Β. α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα αν και μόνο αν:

$$\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda\ (\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (απορ.) ή } \lambda = -3$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\text{συν}\left(\vec{u},\widehat{\ }\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot 2 + \left(-\sqrt{3}\right)\cdot 2\sqrt{3}}{2\cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\widehat{\ }\vec{v}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\text{συν}\left(\vec{u},\widehat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{1\cdot\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right)1}{2\cdot 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\widehat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\text{συν}\left(\vec{v},\widehat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{v},\widehat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι σωστές αντιστοιχίες είναι:

$1 \leftrightarrow$ Δ $\qquad 2 \leftrightarrow$ Α $\qquad 3 \leftrightarrow$ Β.

**<u>Ζήτημα 2ο</u>**

Δίνονται οι αριθμοί α = 2κ + 2 και β = 6κ + 7, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού (2β – α) με το 10 είναι 2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός (α + β – 2) είναι πολλαπλάσιο του 7.

(Μονάδες 8)

**Απάντηση:**

α) Έχουμε: α = 2κ + 2, β = 6κ + 7, με $κ \in \mathbb{Z}$

Έστω δ = (3α, β) $\Leftrightarrow$ δ = (6κ + 6, 6κ + 7). Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} δ \mid 6κ+6 \\ δ \mid 6κ+7 \end{array}\right\}$$

Οπότε:

$$δ/(6κ + 7) - (6κ + 6) \Leftrightarrow δ/1, \text{ δηλαδή } δ = 1.$$

Άρα, οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Έχουμε:

$$2β - α = 2(6κ + 7) - (2κ + 2) = 12κ + 14 - 2κ - 2 = 10κ + 12 =$$
$$= 10κ + 10 + 2 = 10(κ + 1) + 2.$$

Άρα: $2β - α = 10(κ + 1) + 2$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού (2β – α) με το 10 είναι 2.

γ) Ισχύει: κ = πολ.7, δηλαδή κ = 7λ, με $λ \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

$$α + β - 2 = 2κ + 2 + 6κ + 7 - 2 = 8κ + 7 = 8(7λ) + 7 = 7(8λ + 1)$$

Άρα: $α + β - 2 = 7(8λ + 1)$

Αν θέσουμε: 8λ + 1 = μ, με $μ \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$α + β - 2 = 7μ = \text{πολ.}7$$

**<u>Ζήτημα 3ο</u>**

Δίνονται τα σημεία Α(8, 0) και Β(0, 4) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

(Μονάδες 7)

**Απάντηση:**

Επειδή το σημείο Δ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x_\Delta = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_\Delta = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_\Delta = \dfrac{8+0}{2} = 4 \\ y_\Delta = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{array}$$

Δηλαδή: Δ(4, 2)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΔ θα είναι:

$$\lambda_{O\Delta} = \frac{y_\Delta - y_O}{x_\Delta - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Επειδή το σημείο O(0, 0) είναι σημείο της ευθείας ΟΔ, η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - 0 = \lambda_{O\Delta}(x - 0) \Leftrightarrow y = 1/2\, x$$

β) Αν $\lambda_\varepsilon$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε), τότε:

$$(\varepsilon) \perp O\Delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet \lambda_{O\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet 1/2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Επειδή το σημείο Δ(4, 2) είναι σημείο της ευθείας (ε), η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Leftrightarrow y - 2 = -2(x - 4) \Leftrightarrow y + 2x - 10 = 0$$

γ) Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ της ευθείας (ε). Σύμφωνα με το ερώτημα β) ισχύει:

$$2x_0 + y_0 - 10 = 0 \qquad (1)$$

Πρέπει:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x_0-8)^2 + y_0^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_0^2 + (y_0-4)^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = 2x_0^2 + 2y_0^2 \Leftrightarrow$$

$- 16x_0 - 8y_0 + 80 = 0 \Leftrightarrow - 8(2x_0 + y_0 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 10 = 0$

Η τελευταία ισχύει, λόγω της (1).

## Ζήτημα 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό
$n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

(Μονάδες 9)

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

(Μονάδες 8)

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο Α.

(Μονάδες 8)

**Απάντηση:**

Ισχύει ότι:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1),\ n = 1, 2, 3, \ldots, 1999 \qquad (1)$$

α) Έχουμε:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2nx - 2ny + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(n + 1)\, x - 2ny + 1 + 2n = 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε:

$$- 2(n + 1) = A,\ - 2n = B \text{ και } 1 + 2n = \Gamma.$$

Για να είναι η (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), εξίσωση κύκλου, πρέπει:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 4(n + 1)^2 + 4n^2 - 4(1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)^2 + n^2 - (1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 - 1 - 2n > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$$

Επομένως, η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο:

$$K\left(-\frac{A}{2} = n + 1,\ -\frac{B}{2} = n\right)$$

και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$$

β) Έστω Α $(x_0,y_0)$ το σταθερό σημείο που ζητούμε. Το σημείο Α πρέπει να είναι σημείο του κύκλου C. Δηλαδή, πρέπει:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2(n+1)x_0 - 2ny_0 + 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 2n(x_0 + y_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + y_0 - 1)n + (x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0 \qquad (3)$$

Για να ισχύει η (3) για κάθε n = 1, 2, 3, …, 1999, πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} 2(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σημείο Α(1, 0) είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

γ) Έστω ε :x + y − 1 = 0 και d(K, ε) η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου C από την ευθεία (ε). Έχουμε:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1 + n + n - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2n|}{\sqrt{2}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2} = e$$

Επομένως, οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας (ε) και μάλιστα στο σημείο Α, αφού:

1 + 0 − 1 = 0, που ισχύει.