ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΤΕΕ 2008

ΘΕΜΑ 1^{ο}

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
8	1	8	-6	36	36
12	1	12	-2	4	4
14	1	14	0	0	0
16	1	16	2	4	4
20	1	20	6	36	36
Σύνολο	5	70	-	-	80

α) $\bar{x} = \dfrac{8+12+14+16+20}{5} = \dfrac{70}{5} = 14$

β) $\cancel{8}, \cancel{12}, 14, \cancel{16}, \cancel{20}$ άρα δ=14

γ) $s = \sqrt{s^2}$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{80}{5} = \frac{160}{10} = 16 \quad \text{, άρα } s = \sqrt{16} = 4$$

δ) $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 8 = 12$

ε) $CV \cdot 100 = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{4}{14} \cdot 100 = \dfrac{400}{14} \approx 28,5\%$

Μεγαλύτερο από 10% δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 2^{ο}

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\lambda(x-1)}, & \text{αν } 0 \le x < 1,\ \lambda \ne 0 \\[2ex] \dfrac{1}{3x-1}, & \text{αν } x \ge 1 \end{cases}$$

α)

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{\lambda(x-1)} = \frac{\sqrt{1} - 1}{\lambda(1-1)} = \frac{1-1}{\lambda(1-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to x^-} \frac{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\lambda\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}^2-1^2}{\lambda\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\lambda\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\lambda\cdot(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\lambda\cdot(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{\lambda(1+1)} = \frac{1}{\lambda\cdot 2} = \frac{1}{2\lambda}$$

β)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3\cdot 1-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

γ)

πρέπει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = 2\lambda \Rightarrow 2 = 2\lambda \Rightarrow \frac{2}{2} = \lambda \Rightarrow \lambda = 1$

ΘΕΜΑ 3^o

α)

$f'(x) = e^{\lambda x}\cdot(\lambda x)' = e^{\lambda x}\cdot\lambda\cdot 1 = \lambda\cdot e^{\lambda x}$

$f''(x) = (f'(x))' = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda\cdot e^{\lambda x}(\lambda x)' = e^{\lambda x}\cdot\lambda = \lambda^2\cdot e^{\lambda x}$

β)

$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2\cdot e^{\lambda x} - \lambda\cdot e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

γ)

i) Για $\lambda = 2$ είναι $f'(x) = 2\cdot e^{2x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cdot e^{2x} = 0$ αδύνατο

$f'(x) > 0 \Rightarrow 2\cdot e^{2x} > 0$ ισχύει πάντα

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\nearrow$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in R$

ii) Για $\lambda = -1$ είναι $f'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} = 0$ αδύνατο

$f'(x) > 0 \Rightarrow -e^{-x} > 0$ αδύνατο

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in R$

ΘΕΜΑ 4º

Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008 \quad , \quad x \in R$

α) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^3 - 4x + 3 \cdot 1 + 0 = x^2 - 4x + 3$

β)

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 3$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{array} \right.$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Από το πρόσημο του τριωνύμου έχουμε :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

Στο $(-\infty, 1]$ η f γν. αύξουσα

Στο $[1, 3]$ η f γν. φθίνουσα

Στο $[3, +\infty)$ η f γν. αύξουσα

Στο x = 1 η f έχει τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+2008=\frac{1}{3}-2+3+2008=\frac{1}{3}+2009$$

Στο x = 3 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3+2008=\frac{1}{3}\cdot 27-2\cdot 9+9+2008=9-18+9+2008=2008$$

γ) Επειδή στο $\left[1,+\infty\right)$ η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το $f(3)=2008$.

Άρα $f(x)\geq f(3)\Rightarrow f(x)\geq 2008$ για $x\in\left[1\,,\,+\infty\right)$

Επιμέλεια : Μυλωνίδης Σ. - Τάνης Α.