

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Λάθος (βλέπε σελίδα 54 του σχολικού βιβλίου, Το σωστό είναι α, β , ομόσημοι τότε $\alpha \cdot \beta > 0$).
- β) Σωστό (βλέπε σελίδα 63 του σχολικού βιβλίου).
- γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου. Το σωστό είναι ότι $y = x$).
- δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 72 του σχολικού βιβλίου).
- ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 64 του σχολικού βιβλίου).
- A2.** Βλέπε απόδειξη (1) στη σελίδα 71 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων Β και Β' είναι:

$$P(B') = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(B') \Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}.$$

Επίσης

$$P(B - A) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(B - A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

B2. Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

B3. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για ενδεχόμενο B ισχύει:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{40}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow N(\Omega) = 120$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση γίνεται:

$$(\alpha_1 - 1)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 1 = \sqrt[3]{8}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 3$$

Επειδή

$$\alpha_6 = 13$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1) \cdot \omega = 13$$

$$\Leftrightarrow 3 + 5 \cdot \omega = 13$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \omega = 13 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \omega = 10$$

$$\Leftrightarrow \omega = 2$$

Γ2. Το άθροισμα των v - πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι:

$$S_v = \frac{v}{2} \cdot [2 \cdot \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega]$$

Επειδή $\alpha_1 = 3$, $\omega = 2$ και θέλουμε $S_v > 440$, έχουμε:

$$S_v > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (v-1) \cdot 2] > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot (6 + 2v - 2) > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot (2v + 4) > 440$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 2v > 440$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 2v - 440 > 0$$

Η Διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\text{είναι } \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-440) =$$

$$4 + 1760 = 1764$$

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{1764}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 42}{2}$$

$$v_1 = \frac{-2 + 42}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ και}$$

$$v_2 = \frac{-2 - 42}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Επειδή ο v είναι θετικός ακέραιος, δεκτή λύση είναι η $v_1 = 20$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

v	0	20	$+\infty$
$v^2 + 2v - 440$	-	0	+

Οπότε πρέπει $v > 20$.

Άρα το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνά το 440 είναι $v = 21$.

Γ3. Επειδή οι αριθμοί $\alpha_2 - x^2$, $\alpha_3 - x^2$, $\alpha_5 - 2x^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ο αριθμός $\alpha_3 - x^2$ είναι γεωμετρικός μέσος, οπότε ισχύει:

$$(\alpha_3 - x^2)^2 = (\alpha_2 - x^2) \cdot (\alpha_5 - 2x^2) \quad (1)$$

Οι αριθμοί α_2 , α_3 , α_5 είναι όροι της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος Γ1 με

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \alpha_2 = 3 + 2 \Leftrightarrow \alpha_2 = 5$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow \alpha_3 = 3 + 4 \Leftrightarrow \alpha_3 = 7$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \Leftrightarrow \alpha_5 = 3 + 8 \Leftrightarrow \alpha_5 = 11$$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}(7-x^2)^2 &= (5-x^2) \cdot (11-2x^2) \\ \Leftrightarrow 49-14x^2+x^4 &= 55-10x^2-11x^2+2x^4 \\ \Leftrightarrow x^4-7x^2+6 &= 0 \text{ (Διτετράγωνη)} \\ \Leftrightarrow (x^2)^2-7x^2+6 &= 0\end{aligned}$$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ με $\omega \geq 0$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 7\omega + 6 = 0$
Το τριώνυμο έχει: $\alpha = 1$, $\beta = -7$, $\gamma = 6$. Η διακρίνουσά του είναι:
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$.

Οι ρίζες του είναι: $\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$

δηλαδή: $\omega_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$ και $\omega_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Η εξίσωση $x^2 = \omega$ για $\omega = 1$ γίνεται: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Η εξίσωση $x^2 = \omega$ για $\omega = 6$ γίνεται:

$$x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \text{ ή } x = -\sqrt{6}$$

Οι ακέραιες τιμές του x είναι το 1 και το -1.

Για $x = 1$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - 1 = 6$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 = 9$$

Για $x = -1$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - (-1)^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - (-1)^2 = 7 - 1 = 6$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 \cdot (-1)^2 = 11 - 2 = 9$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Για $x = \pm\sqrt{6}$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - 6 = -1$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - 6 = 1$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 \cdot 6 = -1$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = \frac{1}{-1} = -1$ που απορρίπτεται γιατί $\lambda \neq -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-\Delta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \Delta \\ \Leftrightarrow \Delta &= \Delta^2 - 4\Delta \\ \Leftrightarrow \Delta^2 - 5\Delta &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta \cdot (\Delta - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta = 0 \text{ ή } \Delta = 5 \end{aligned}$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) έχουμε:

- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, την $x = 0$.
- Αν $\Delta = 5$, η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Δ2. Για $\Delta = 5$ η εξίσωση (1) γίνεται: $x^2 - 5x + 5 = 0$

α) Από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{1} = -5 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 5$$

Έτσι ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5 \cdot 5} \\ \Leftrightarrow g(x) &= \sqrt{x^2 - 10x + 25} \\ \Leftrightarrow g(x) &= \sqrt{(x-5)^2} \\ \Leftrightarrow g(x) &= |x-5| \end{aligned}$$

β) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$.

Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της f πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $2x^2 - 3x + 1$

Η διακρίνουσά του είναι: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$.

Οι ρίζες του είναι: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{4}$, δηλαδή: $x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ και $x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται στη μορφή:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται:

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = 2x - 1$$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , θα λύσουμε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ με $x \neq 1$.

Από Δ2 και (β) ερώτημα, ισχύει: $2x - 1 = |x - 5|$ (2)

Για να βγάλουμε την απόλυτη τιμή, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

➤ Αν $x - 5 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 5$ έχουμε $|x - 5| = x - 5$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x - 5 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= -5 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= -4 \end{aligned}$$

Η ρίζα απορρίπτεται διότι $-4 < 5$.

➤ Αν $x - 5 < 0$ δηλαδή $x < 5$ έχουμε $|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x - 1 &= -x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x + x &= 5 + 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Η ρίζα $x = 2$ είναι δεκτή γιατί $2 < 5$

Για $x = 2$ έχουμε ότι: $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow f(2) = 3$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα κοινό σημείο το $A(2,3)$.