

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A έχει αντίστροφη, τότε $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Μονάδες 2

iv) Μια συνεχής στο (α, β) συνάρτηση, παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

v) Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, z_1 και w με $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε ο

$$z_1 = \frac{1 + (\beta - 2)i}{\alpha + 2 - i} \text{ να είναι φανταστικός και } \left| (1 - i) \operatorname{Im} \left(w - \frac{1}{2}i \right) \right| = \sqrt{2} \left| w + \frac{1}{2}i \right|.$$

B1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία ε με εξίσωση $x - y + 4 = 0$.

Μονάδες 6

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2 + 2y = 0$.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 5

B3. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του \bar{w} στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 3

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την ευθεία $x - y + 4 = 0$ και την γραμμή C του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} με $f(1) = 1, g(1) = 0$ και ικανοποιούν τις σχέσεις: $f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1$ και $2f(x) + x^2 - 2x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x g(x) + 1$.

Μονάδες 6

Γ2. α) Να υπολογίσετε το $g'(1)$.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)g\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \right] = 0$.

Μονάδες 4

Γ3. Αν, επιπλέον $g(x) = (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, από το σημείο $M(1, \lambda)$ άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x) = e^x(1-x) + 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt < g''(x) e^{\frac{[g''(x)]^2}{2}} - g''(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(2) = -2, \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2} dt \cdot \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2} dt < 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$, τέτοιο, ώστε $g(\rho) = -2$ (μονάδες 5) και $g'(\rho) < 0 < g'(2)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $g(1+x-x^3) = g(1) + g(x) - g(x^3)$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία